ESTRUCTURAS DE MADERA: UNA LECTURA PRÁCTICA EN LA NORMATIVA

(II) LA VIGA MIXTA CON CONEXIÓN FLEXIBLE

Por

JORGE FERNÁNDEZ-LAVANDERA

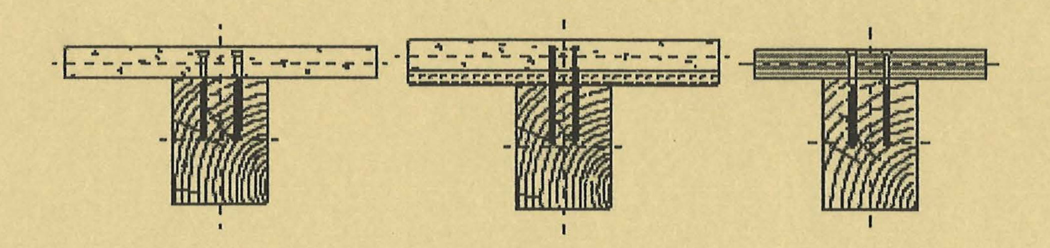
JOSÉ L. FERNÁNDEZ CABO

JOSÉ MIGUEL ÁVILA JALVO

RAFAEL DÍEZ BARRA

MIGUEL ÁVILA NIETO

JAVIER ÁVILA NIETO



CUADERNOS DEL INSTITUTO JUAN DE HERRERA DE LA *ESCUELA DE* ARQUITECTURA *DE MADRID*

1-76-01

ESTRUCTURAS DE MADERA: UNA LECTURA PRÁCTICA EN LA NORMATIVA

(II) LA VIGA MIXTA CON CONEXIÓN FLEXIBLE

Por

JORGE FERNÁNDEZ-LAVANDERA

JOSÉ L. FERNÁNDEZ CABO

JOSÉ MIGUEL ÁVILA JALVO

RAFAEL DÍEZ BARRA

MIGUEL ÁVILA NIETO

JAVIER ÁVILA NIETO

CUADERNOS

DEL INSTITUTO

JUAN DE HERRERA

DE LA *ESCUELA DE*

ARQUITECTURA

DE MADRID

1-76-01

CUADERNOS
DEL INSTITUTO
JUAN DE HERRERA

NUMERACIÓN

5 Área
65 Autor
02 Ordinal de cuaderno (del autor)

ÁREAS

0 VARIOS
1 ESTRUCTURAS
2 CONSTRUCCIÓN
3 FÍSICA Y MATEMÁTICAS
4 TEORÍA
5 GEOMETRÍA Y DIBUJO
6 PROYECTOS
7 URBANISMO
8 RESTAURACIÓN

Estructuras de madera: una lectura práctica de la normativa (II): LA VIGA MIXTA CON CONEXIÓN FLEXIBLE

Instituto Juan de Herrera.
Escuela Técnica Superior de Arquitectura de Madrid.
Composición y maquetación: Lucía Alba Fernández
CUADERNO 261.01/ 1-76-01
ISBN 13: 978-84-9728-274-1
ISBN 13: 978-84-9728-225-3 (obra completa)
Depósito Legal: M-36876-2008

ÍNDICE

Cuaderno 1 de 2:

• Prólogo

• Tema 1: Introducción

- 1.1. ¿Por qué usar una viga mixta?
- 1.2. Conceptos previos
  - 1.2.1. Esfuerzos, compatibilidad de deformación, rasante y deslizamiento
  - 1.2.2. Bases analíticas para el modelo con conexión flexible
- 1.3. Estados sin conexión y sin deslizamiento
  - 1.3.1. Límite inferior: conexión nula
  - 1.3.2. Límite superior: estado sin deslizamiento o de conexión completa
  - 1.3.3. Variación cualitativa de la respuesta con la rigidez de conexión
- 1.4. La sección homogeneizada
- 1.5. Métodos para el análisis
- 1.6. Conclusión

• Tema 2: Rendimiento con conexión flexible

- 2.1. Introducción
- 2.2. Ganancia potencial por forma de la sección
- 2.3. Eficiencia por causa de una conexión flexible
- 2.4. Ejemplo
- 2.5. Viga biapoyada con carga puntual y conexión de rigidez uniforme
- 2.6. Deformaciones longitudinales impuestas, retracción
- 2.7. Conclusión

• Tema 3: El método gamma de Eurocódigo 5

- 3.1. Introducción
- 3.2. Ecuaciones entre cargas y deformaciones
- 3.3. Solución para el caso de flector sinusoidal
- 3.4. La sección penalizada por deslizamiento
- 3.5. Condiciones para la utilización del método
- 3.6. Los coeficientes "γ" y la eficiencia
- 3.7. Introducción al efecto del axial y al análisis del pandeo
- 3.8. Otras secciones en flexión, el anexo "B" de EC-5
- 3.9. Conclusión

Cuaderno 2 de 2:

- Tema 4: La conexión y otras referencias para el diseño

  - 4.1. Introducción
  - 4.2. Clasificación de los conectores
  - 4.3. Módulos de deslizamiento y resistencia de algunos conectores
  - 4.4. Anchos eficaces de ala
  - 4.5. Otras cuestiones
  - 4.6. La estructura mixta entre maderas en el CTE: SE-M
  - 4.7. Dimensionamiento práctico
  - 4.8. Repertorio de la conexión
  - 4.9. Conclusión

- Tema 5: Protocolo de análisis adaptado al CTE

  - 5.1. Introducción
  - 5.2. Apeo y fluencia
  - 5.3. Bases de la propuesta para el análisis
  - 5.4. Forjado mixto entre madera y hormigón
    - 5.4.1. Cálculos en estado límite último (ELU)
    - 5.4.2. Estudio en estado límite de servicio (ELS)
    - 5.4.3. Algunas conclusiones
  - 5.5. Escuadría de madera aserrada con tablero microlaminado (LVL)
    - 5.5.1. Análisis en ELU
    - 5.5.2. Análisis en ELS
  - 5.6. Conclusión

- Ejercicios

  - Enunciados
  - Soluciones

- Bibliografía

PRÓLOGO

La estructura mixta entre maderas o con otro material, como el hormigón o el acero, puede aportar soluciones adecuadas tanto en la obra nueva como en la rehabilitación. La finalidad puede ser el refuerzo, o que razones funcionales impongan una superposición de materiales de cuya conexión se obtenga una clara ventaja estructural, incluso como solución alternativa frente a piezas simples que precisen demasiada escuadría.

Este texto se orienta en el ámbito de la edificación y preferentemente en la estructura mixta entre madera y hormigón, sobre todo frecuente en forjados, y para la que aún no existe una normativa específica. A pesar de ello, muchos de los planteamientos son genéricos y por tanto aplicables a otros ámbitos.

Incluso a nivel normativo en la estructura entre maderas la información resulta escasa, se reduce a un anejo del Eurocódigo 5 que sólo cubre los casos más simples y sin establecer todo el -vínculo- necesario con la normativa de hormigón. Por otra parte, no ofrece una perspectiva del todo clara y directa para orientar el diseño. Así pues, son escasas las herramientas que asesoren y guíen al proyectista.

A nivel científico, la información está muy dispersa y muchos trabajos no han partido de un profundo conocimiento del estado del arte si bien, en artículos recientes, desde el 2005 y 2006, ya se está produciendo una cierta compilación de información de calidad y aún queda trabajo por hacer.

En estos primeros cuadernos dedicados a la estructura mixta con madera centraremos la atención en lo conceptual y en las herramientas simplificadas que permiten solucionar modelos sencillos. Si el problema abordado queda fuera de este ámbito, su complejidad hay que acometerla en base a modelos más avanzados y con herramientas informáticas. A pesar de ello, lo importante es comprender los aspectos relevantes para el diseño, los condicionantes y oportunidades y el protocolo de comprobaciones que hay que llevar a cabo.

En principio, la intención es continuar con otros cuadernos para completar la información y las herramientas de análisis en este tipo de estructura, así como actualizarlos en acuerdo a los nuevos avances y revisarlos para mejorar su carácter didáctico. Todo requiere un proceso de evolución y maduración.

Todos estos trabajos tendrán facetas desde la mera compilación y ordenación de aspectos dispersos en normativas y trabajos de diversos autores hasta tareas de investigación en lo tocante al análisis, el diseño preliminar y la experimentación. Y para que toda esta labor sea realmente útil, se implementará con una herramienta informática además de aportar tablas para los casos más habituales.

Se pretende que estos documentos posean un carácter principalmente desarrollado, con lo que se suele llamar -transferencia de tecnología-, y su destinatario es, antes que nada, el profesional y el estudiante, no el investigador.

Bajo este objetivo, se ha buscado la simplicidad en la exposición, introduciendo los conceptos de manera escalonada y evitando el exceso de rigor científico, de manera que el lector más interesado en la práctica pueda prescindir o postergar aquellos aspectos que en principio no considere necesarios. A su vez, el lector más especializado, puede encontrar lecturas y referencias que le resulten útiles.

Finalmente, y antes de comenzar con el texto, es conveniente adelantar las principales peculiaridades de la estructura mixta con madera, a saber: el deslizamiento y la reología.

Así como las uniones encoladas entre maderas suelen ser muy rígidas, con los más frecuentes sistemas de conexión mecánica se produce un deslizamiento entre materiales que origina pérdida de eficiencia; la conexión se denomina entonces como "flexible". Este deslizamiento o resbalamiento entre los materiales se origina por el aplastamiento que en la madera produce la clavija; también veremos como aumenta por la deformabilidada de las clavijas en el caso de separación de materiales.

Si la conexión es muy rígida, sin deslizamiento, el diseño no queda condicionado por la unión; sólo a posteriori debe pantearse la comprobación resistente de ésta. Bajo este supuesto el problema es clásico y más sencillo. Si en cambio la conexión es flexible, se convierte en un factor decisivo desde un principio para conseguir la deseada respuesta estructural del conjunto mixto.

Esta respuesta estructural bajo conexión flexible, la interpretaremos desde los estados sin conexión y sin deslizamiento, mostrando los parámetros que más decisivamente influyen a orientar y racionalizar del diseño.

En cuanto a la reología, el otro aspecto mencionado, la peculiaridad en la estructura hormigón-madera y madera-madera es que todos los materiales son reológicos, incluso resulta reológico el comportamiento de la conexión al depender de ellos.

Trataremos de abordar estos y otros aspectos bajo una perspectiva práctica y sencilla, sin olvidar que la realidad es bastante compleja, influyendo en ella, como veremos, variables de carácter aleatorio y de dificil evaluación.

1.1. ¿Por qué usar una viga mixta?

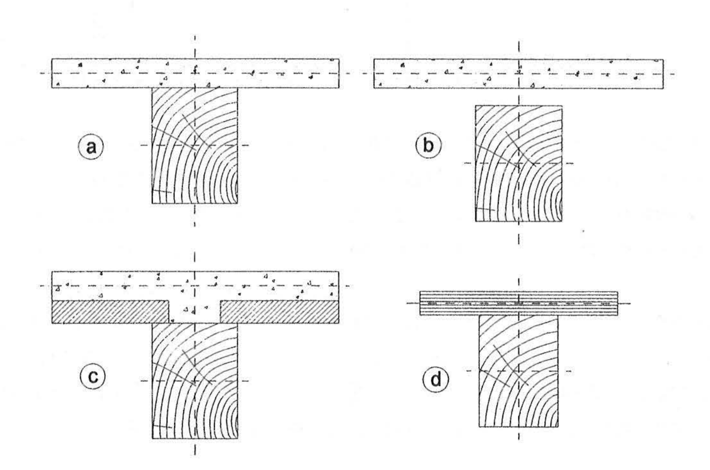
Antes de entrar en detalles es conveniente preguntarse dónde es procedente usar una viga mixta. Este apartado trata de contestar a esta pregunta.

¿Qué es una pieza mixta? Una pieza mixta es la integrada por dos o más piezas, de iguales o distintos materiales, entre las cuales se establecen generalmente enlaces (conexión) para que trabajen lo más solidariamente posible. Los enlaces asumen como esfuerzo más decisivo el *rasante* entre dichas piezas. Como es bien sabido y veremos a lo largo del texto, al conectar los materiales se consigue una respuesta estructural considerablemente mejor que la suma de las respuestas individuales.

Si la conexión es infinitamente rígida y no se deforma, diremos que se trata de una conexión completa, en este caso no se produce "deslizamiento" frente al rasante. Si hay una deformación significativa diremos que es flexible, en este caso hay deslizamiento entre los materiales y se pierde eficacia. Si la conexión, que también la designaremos como cosido, fuese demasiado flexible, el comportamiento de la pieza mixta resultaría próximo a la situación sin conexión.

Puede ocurrir que sea imposible o demasiado costoso el recurrir a una sola sección resistente, o que sea preciso el refuerzo de un elemento estructural, o incluso que el diseño precise de la composición de dos o más materiales obteniéndose una clara mejora al conectarlos.

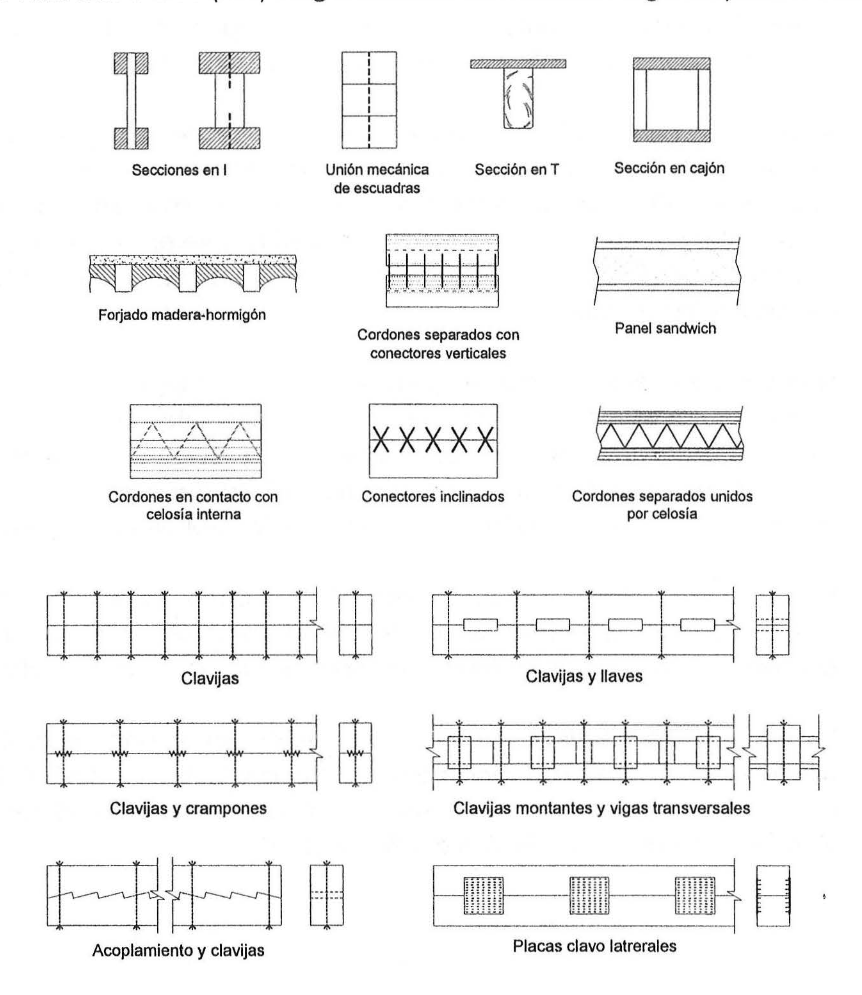
En este texto se estudiará el caso en el que, al menos, uno de los materiales es madera, analizando el problema específico derivado de la unión con clavijas. Centraremos sobre todo la atención en la estructura mixta entre madera y hormigón, vinculada fundamentalmente a la viga mixta, es decir, a la flexión simple (sin axial).



El caso "a" de la figura, con los materiales en contacto, podría ser, por ejemplo, el de un forjado en el que se vierte el hormigón sobre las viguetas de madera y el relleno de entrevigado; es más característico en rehabilitación que en la obra nueva. En el caso "b" se interpone un tablero continuo entre las viguetas como encofrado y sin efecto estructural; es más habitual en obra nueva.

La separación de materiales puede conllevar una pérdida acusada de la rigidez de la conexión, sobre todo si se utilizan clavijas verticales. Para evitar este hecho puede optarse por la solución "c" que, sin embargo, no tiene la ventaja constructiva de colocar un tablero continuo. En ocasiones se utilizan materiales cerámicos.

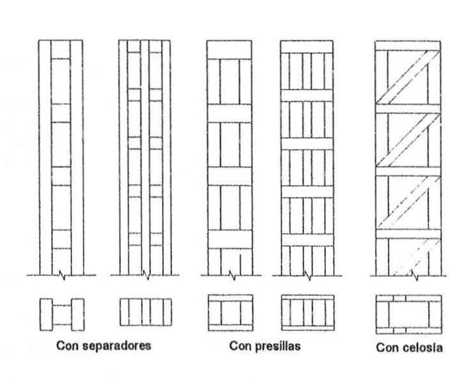
El caso "d" representa el refuerzo de una viga existente mediante una madera de alta calidad, como un tablero microlaminado (LVL). Seguidamente se muestran algunas posibilidades:



Antes de proseguir es conveniente diferenciar entre uniones encoladas (entre maderas) y uniones mecánicas (entre maderas o con otro material como hormigón o acero). Las encoladuras son, en general, muy rígidas y se admite que no se origina deslizamiento. En cambio, con uniones mecánicas (frecuentemente de tipo clavija) se debe considerar el deslizamiento.

No obstante, CTE: SE-M (ref. [42]) advierte de la existencia de colas con cierta capacidad de plastificación (art. 10.1.1) con las que puede resultar preciso considerar el deslizamiento. Por otra parte, SE-M admite para clavijas inclinadas, bajo ciertas consideraciones (art. 10.1.2), un análisis simplificado sin tener en cuenta el deslizamiento.

Cabe también citar como clásicos elementos estructurales los pilares compuestos, con uniones mediante separadores, presillas o celosías (como se muestra en la figura al margen derecho); si bien, centraremos la atención en los elementos en flexión simple (sin axial). SE-M contempla algunos casos (art. 10.2) con uniones encoladas, sin considerar el deslizamiento. Teniéndolo en cuenta puede recurrirse a los anexos de EC-5 (ref. [20], [22]).



Históricamente el problema ha estado relacionado con la limitación de escuadrías y longitudes de la madera enteriza.
En la actualidad, la situación tiene matices bien distintos. Entran en juego nuevas variables de diseño y las antiguas (la limitación de escuadría y longitud) juegan un papel mucho menos importante debido la aparición de las colas, es decir, de los laminados. Veamos paso a paso cada una de estas nuevas variables.

a) el requisito acústico en uso colectivo

El aislamiento acústico que se le pide a un forjado de edificación es cada vez más exigente. Tratándose de uso colectivo, sea residencial o comercial, es preciso disponer una masa elevada. Esto supone mayores cargas permanentes y en consecuencia el control de la rigidez a largo plazo resulta un requisito clave en el diseño. Salvo en el caso de luces pequeñas, la conexión mixta con el hormigón ofrece una adecuada ventaja estructural en resistencia y, especialmente, en rigidez.

b) el control de la vibración en uso colectivo

De acuerdo con el CTE-DB-SE (Seguridad Estructural), dentro de la aptitud al Servicio está el control de vibraciones. A continuación se recoge el apartado 4.3.4 de dicho documento resaltando en cursiva lo fundamental:

> *4.3.4 Vibraciones*
> 1 Un edificio se comporta adecuadamente ante vibraciones debidas a acciones dinámicas, si la frecuencia de la acción dinámica (frecuencia de excitación) *se aparta suficientemente de sus frecuencias propias.*
> 2 En el cálculo de la frecuencia propia se tendrán en cuenta las posibles contribuciones de los cerramientos, separaciones, tabiquerías, revestimientos, solados y otros elementos constructivos, así como la influencia de la variación del módulo de elasticidad y, en el caso de los elementos de hormigón, la de la fisuración.
> 3 Si las vibraciones pueden producir el colapso de la estructura portante (por ejemplo debido a fenómenos de resonancia, o a la pérdida de la resistencia por fatiga) se tendrá en cuenta en la verificación de la capacidad portante, tal como se establece en el DB respectivo.
> 4 *Se admite que una planta de piso susceptible de sufrir vibraciones por efecto rítmico de las personas, es suficientemente rígida, si la frecuencia propia es mayor de:*
> *a) 8 hertzios, en gimnasios y polideportivos;*
> *b) 7 hertzios en salas de fiesta y locales de pública concurrencia sin asientos fijos;*
> *c) 3,4 hertzios en locales de espectáculos con asientos fijos.*

La limitación de 7 y 8 Hz es fortísima, y muy difícil de conseguir sin relaciones de luz-canto bajas, lo que suele implicar, una vez que existe capa de compresión y limitación de cantos, la elección de la viga mixta.

c) coste y beneficio

Para analizar la variable –coste- hay que diferenciar entre volumen de material, medios auxiliares de ejecución y los tiempos de trabajo.

Posteriormente veremos que en forjados la ganancia de inercia al conectar los materiales es en general del orden de 3 a 3,5 veces con conexión rígida y de entre 2 a 2,5 veces con conexión flexible respecto del estado sin conexión; sin duda valores relevantes. La ganancia en resistencia es algo menor, no obstante, el aspecto clave suele ser la rigidez.
La mejora de la respuesta estructural al conectar supone un ahorro de materiales, pero frente a éste aparecen dos costes significativos. Uno de ellos la conexión, el otro el apeo que, en general, resulta conveniente para obtener el rendimiento deseado.

Por otra parte, el hormigón supone un peso propio considerable que en cierta medida merma la capacidad portante en comparación a soluciones más ligeras con sólo madera. A su vez, se demanda mayor necesidad estructural en los elementos subyacentes (vigas y pilares) y en los cimientos. Las soluciones mixtas y su tipología (en obra nueva y rehabilitación) deben plantearse y valorarse en función del conjunto de la estructura.

En rehabilitación puede resultar favorable bajo un punto de vista económico el mantener la madera existente reforzándola convenientemente. En estas situaciones la conexión hay que llevarla a cabo in situ y resulta bastante laboriosa.

El apeo en rehabilitación puede ser un inconveniente o incluso no ser posible. Sin apeo es factible, en ocasiones, obtener la mejora necesaria asumiendo sólo el conjunto mixto la concarga colocada tras su ejecución y la futura sobrecarga de uso. Si es posible realizar apeo puede obtenerse una mejora, y si éste descarga por completo la viga existente, la nueva pieza mixta asume todas las acciones. Volveremos más détenidamente sobre la cuestión del apeo. Por otra parte, suele ser oportuna la nivelación de la viga existente.

En obra nueva puede reducirse el coste de la conexión mediante su industrialización. El apeo es en general factible y puede estudiarse la ventaja que aporta frente a su coste y planificación de la obra. Por otro lado, para la estructura mixta madera-hormigón hay que tener presentes las ventajas funcionales ya mencionadas.

En estructuras pequeñas y simples de nueva construcción no suele ser rentable la solución mixta. En rehabilitación es frecuente que resulte económicamente favorable frente a la sustitución.

d) el valor histórico de armaduras existentes

En restauración de patrimonio arquitectónico es relativamente frecuente recurrir a la solución mixta para evitar la sustitución, en este caso no ya por cuestiones económicas sino históricas. En muchas ocasiones, los límites entre la rehabilitación y la restauración no son nada claros. Además, la restauración presenta la particularidad de la prótesis; es decir, la pieza mixta en prolongación. No se tratará aquí esta cuestión (véase v.g. la ref. [8]).

En conclusión, el análisis anterior conduce a establecer *tres categorías con rasgos bien diferenciados:*

I) *la obra nueva*
II) *la rehabilitación*
III) *la restauración*

En el primer caso se puede industrializar la conexión, y puede no existir una limitación de cantos. La solución mixta puede ser la más adecuada en cuanto se trate de usos colectivos o estructuras singulares.

En el segundo caso se ha de acudir a soluciones de conexión no industrializadas, pero a pesar de ello el sobrecosto suele compensar al de la sustitución (no sólo económicamente sino en cuanto a molestias).

En el tercer caso, el objetivo fundamental es evitar la sustitución. La variable costo se considera claramente menos relevante. La solución mixta es viable en la medida en que es compatible con el criterio –arquitectónico- de intervención.

En el segundo y tercer caso aparece el problema específico de la prótesis, es decir, el daño local. Esta cuestión no es abordada en este texto.

En el ámbito de la rehabilitación y la restauración cabe mencionar, entre las referencias citadas en la bibliografía, la [8], [9] y [11].

e) otras ventajas estructurales

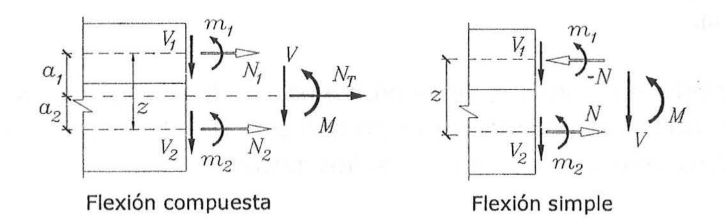
Cabe también citar la capacidad de reparto transversal de cargas localizadas y de conseguir un deseable efecto diafragma. El sistema puede prepararse para que resulte aplicable a la madera el factor de carga compartida (K_{sys}).

1.2. Conceptos previos

1.2.1. Esfuerzos, compatibilidad de deformación, rasante y deslizamiento

En el estudio de las piezas mixtas es útil diferenciar los esfuerzos que afectan a cada material. Suelen denominarse "esfuerzos distribuidos". A los esfuerzos totales para el conjunto de la sección es frecuente denominarlos como globales.

Las tensiones en cada material pueden reducirse (ver siguiente figura) a una resultante con componentes "V_i" de esfuerzo cortante y "N_i" de axial y a momentos "m_i". Tomaremos como referencia los centros geométricos de cada material (ponderando con su módulo elástico "E_i").



Flexión compuesta   Flexión simple

Los esfuerzos distribuidos (N_i, V_i, m_i) han de formar un sistema equivalente a los esfuerzos globales que afectan al conjunto de la sección: "N_T (axial)", "M (momento flector)" y "V (esfuerzo cortante)". El balance de equilibrio permite escribir:

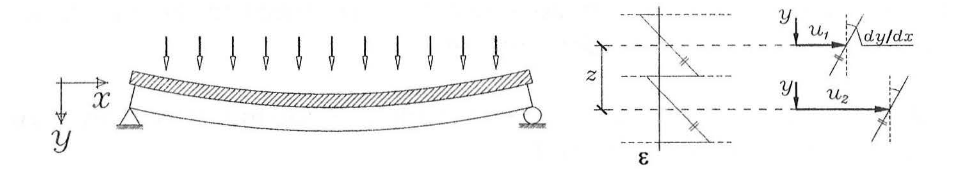
$$N_T = N_1 + N_2 \ ; \ V = V_1 + V_2$$
$$M = m_1 + m_2 + N_2\, a_2 - N_1\, a_1$$

En donde las distancias "a_i" localizan la posición a la que se han referido los esfuerzos globales, en general el centro de gravedad de la sección.

En un caso de flexión simple (sin axial global "N") los axiales distribuidos en cada material deben ser fuerzas iguales y contrarias creando un par "N z". En este caso:

$$V = V_1 + V_2 \quad ; \quad M = m_1 + m_2 + z\, N$$

Por otra parte, la deformación vertical conjunta, como se muestra en la siguiente figura:



conlleva a una común elástica "y(x)" y de sus sucesivas derivadas, lo que supone igualdad de giros y curvaturas en los materiales. Esta última condición supone ("I" momentos de inercia y "E" módulos de elasticidad, subíndices "1,2" para cada material, obviando la deformación adicional por el cortante):

$$-\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{1}{\rho}=\chi=\frac{m_1}{E_1 I_1}=\frac{m_2}{E_2 I_2}=\frac{m_1+m_2}{\sum EI}$$

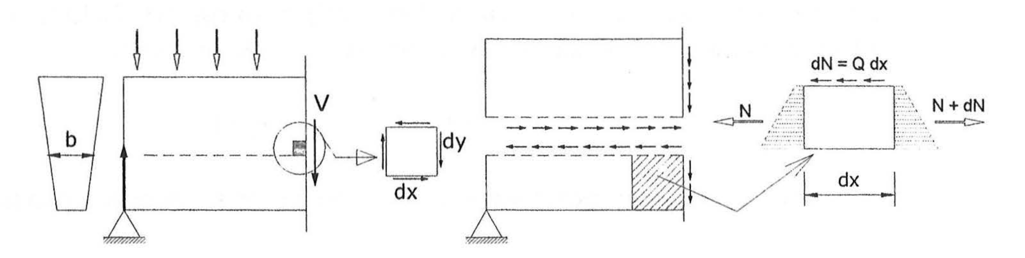
Por la igualdad de curvaturas las rectas representativas de los alargamientos unitarios (ε) en cada material son paralelas (ver anterior figura). Bajo un punto de vista geométrico, la igualdad de curvaturas supone una aproximación para pequeñas deformaciones en la que los radios de curvatura son grandes respecto de las dimensiones transversales de la pieza.

En la figura también se muestran los campos de deformaciones: un igual descenso vertical "y", iguales giros "dy/dx" y desplazamientos horizontales "u_i" de, por ejemplo, los centros geométricos de cada material. Para las deformaciones ha quedado planteada una ecuación diferencial para la elástica; en el caso de flexión simple puede escribirse: $d^2y/dx^2 = -(M - N z) / \Sigma EI$. Con los movimientos horizontales cabe establecer ("ε" alargamiento unitario, "A" área): $du_i/dx = \varepsilon_i = N_i / (E_i A_i)$.

Como paso final para resolver el problema (por brevedad omitiremos por ahora las ecuaciones para los cortantes distribuidos) es preciso estudiar el comportamiento de la conexlón frente al esfuerzo rasante. De aquí se derivan tres modelos:

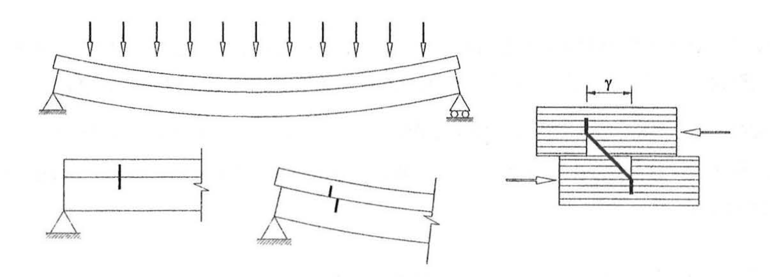
- Que la conexión sea infinitamente rígida y no se produzca deslizamiento. En este caso el diagrama de alargamientos unitarios es continuo.
- Que no haya conexión. En este caso el rasante (Q) es nulo.
- Que haya una conexión flexible que, en régimen lineal, supone una proporcionalidad entre rasante (Q) y deformación (γ) de la conexión ($Q = k_{unt}\,\gamma$). En este caso el modelo deriva en ecuaciones diferenciales.

Recordemos brevemente el concepto de esfuerzo rasante. Al igual que en una sección transversal se desarrollan tensiones cortantes, también se originan en una sección longitudinal denominándose tensiones rasantes. Aislando un elemento infinitesimal (rectangular), como se muestra en la siguiente figura, ambas tensiones son, como es sabido, necesarias (e iguales) para su equilibrio (de momentos).



Las tensiones rasantes, en todo el ancho de la sección ("b" en la figura), suponen una fuerza por unidad de longitud (Q) que es habitual denominarla esfuerzo rasante o simplemente rasante. Como se muestra en la figura, el rasante equilibra el balance de las tensiones normales.

La conexión debe hacer frente al rasante, ante el cual sufrirá una deformación que origina el deslizamiento. De esta manera, dos puntos en contacto antes de la deformación (o en una misma vertical en caso de separación entre los materiales) se distanciarán después de ésta como se esquematiza en la siguiente figura.

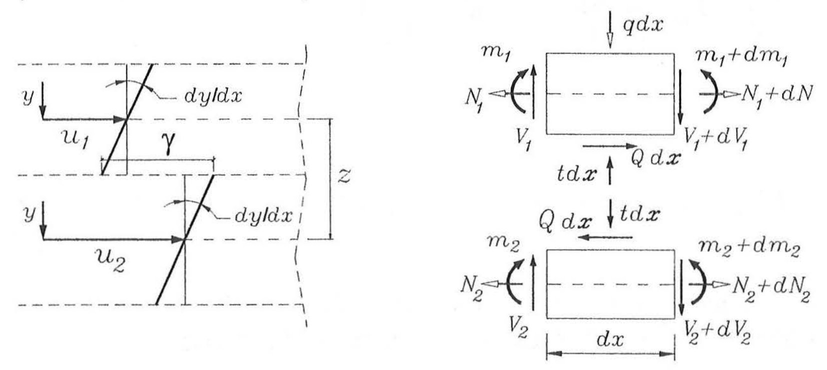


La deformación en la conexión se ha originado por el aplastamiento del material produciéndose la flexión del conector. Un motivo de adicional flexibilidad de la unión se originaría si los materiales estuviesen separados. En la madera, el aplastamiento es más significativo que en materiales más rígidos como el hormigón y el acero. Además, la deformación por aplastamiento se incrementa en el tiempo por la reología. En las estructuras mixtas con madera, la conexión es también "reológica".

Para un conector, la relación lineal entre fuerza cortante (rasante) "$Q_{conector}$" y movimiento "γ" (deslizamiento) se expresa por el coeficiente "K_{ser}" (unidades: fuerza/longitud): $Q_{conector} = K_{ser}\,\gamma$.

1.2.2. Bases analíticas para el modelo con conexión flexible

Para establecer un modelo "continuo", si los conectores están distanciados (localmente) a una distancia "s" (de manera más general puede ser s(x) como función de la coordenada longitudinal), a cada enclave le es atribuible una rigidez por unidad de longitud "$K_{unf}=K_{ser}/s$". Éste parámetro de la conexión "K_{unf}" es el fundamental; dimensionalmente equivale a una fuerza por unidad de superficie. Con este planteamiento puede decirse intuitivamente que hemos sustituido la conexión por una encoladura equivalente.



La figura muestra el deslizamiento "γ" que hace entrar en carga a la conexión (no debe confundirse su simbología con la del que posteriormente se denominará factor de penalización en el método de EC-5 ni con los coeficientes de seguridad) deduciéndose:

$$\gamma = u_2 - u_1 + z\frac{dy}{dx}$$

Este balance de desplazamientos equivale al movimiento del conector bajo un rasante derivado de un cortante positivo. La relación entre el rasante "Q", como fuerza por unidad de longitud, y la deformación causada en la conexión resulta ser:

$$Q = K_{unt}\,\gamma = K_{unt}\left(u_2 - u_1 + z\,y'\right)$$

De la figura anterior, por el equilibrio de fuerzas horizontales, también se deduce que el rasante es (bajo el supuesto de que no existan axiales exteriores aplicados): $Q = -dN_1/dx = dN_2/dx$. En un caso de flexión simple: $Q = dN/dx$. Estas expresiones son muy útiles para evaluar el rasante a partir del axial distribuido; con el axial en función del flector el rasante se obtiene en función del cortante.

En flexión simple puede establecerse:

$$\frac{dN}{dx} = K_{unt}\left(u_2 - u_1 + z\frac{dy}{dx}\right)$$

La derivada de esta expresión en un tramo de conexión uniforme es:

$$\frac{d^2N}{dx^2} = K_{unt}\left(\frac{du_2}{dx} - \frac{du_1}{dx} + z\frac{d^2y}{dx^2}\right)$$

Teniendo en cuenta que:

$$\varepsilon_1 = \frac{du_1}{dx} = \frac{-N}{E_1\,A_1} \;;\; \varepsilon_2 = \frac{du_2}{dx} = \frac{N}{E_2\,A_2} \;;\; -\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{m_1 + m_2}{E_1 I_1 + E_2 I_2} = \frac{M - N\,z}{\sum EI}$$

Se puede fácilmente obtener la ecuación diferencial de N.M. Newmark et. al (1951, ref. [45]) para el axial distribuido en flexión simple bajo conexión uniforme:

$$\frac{d^2N}{dx^2} - K_{unt}\frac{EI_{\max}}{\overline{EA}\;EI_{\min}}N = -K_{unt}\frac{z}{EI_{\min}}M$$

en donde:

$$EI_{\min} = \sum EI = E_1\,I_1 + E_2\,I_2 \;;\; EI_{\max} = \sum EI + z^2\,\overline{EA} \;;\; \overline{EA} = \frac{E_1\,A_1\,E_2\,A_2}{E_1\,A_1 + E_2\,A_2}$$

Veremos seguidamente como "EI_{min}" es la rigidez a flexión de la viga en el caso de no existir conexión y como "EI_{max}" lo es si no se produce deslizamiento.

El parámetro $\overline{EA}$ tiene un formato de rigidez axial y se mostrará cómo interviene en el análisis de la flexión simple; no es la rigidez frente al axial global.

Un mayor detalle del procedimiento analítico aquí mostrado puede consultarse en las referencias indicadas en la bibliografía (J.L. Fdz. Cabo, J. Fdz. Lavandera y J.M. Ávila Jalvo, ref. [27], [28] y [29]).

Posteriormente, al exponer el método de EC-5, se partirá del sistema de ecuaciones diferenciales entre cargas y campos de deformaciones.

1.3. Estados sin conexión y sin deslizamiento

Es muy conveniente interpretar el estado con conexión flexible entre los límites de estos dos estados. Trabajaremos con flexiones (simples sin axial) originadas por cargas transversales e interpretaremos seguidamente estos estados como los límites inferior y superior de la respuesta estructural. Esta visión habría que matizarla (J. Fdz. Lavandera, 2007, ref. [29]) en el caso de introducción de flectores mediante axiales iguales y opuestos (pares) en cada material pero se mantiene si sólo se introducen momentos distribuidos (en proporción a las rigideces a flexión de cada material en acuerdo con la compatibilidad de curvaturas).

1.3.1. Límite inferior: conexión nula

Consideraremos que los materiales mantienen la misma elástica y por tanto la igualdad de curvaturas:

$$-\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{m_1}{E_1 I_1}=\frac{m_2}{E_2 I_2}=\frac{m_1+m_2}{\sum EI}$$

Para ello se generarán tensiones normales a las interfases, de compresión o incuso admitiremos la tracción, pero sin componente de rasante.

Aún así, el estado de conexión nula precisa de condiciones adicionales de sustentación para que no sea un mecanismo frente a las acciones horizontales. Si uno de los materiales está debidamente sustentado, cabe por ejemplo unir el otro mediante un solo conector.

Al no haber conexión no puede desarrollarse rasante. Si además no hay aplicados axiales no hay axial distribuido en los materiales. Analíticamente es dN/dx = 0 → N = Cte y sin axiales aplicados: N = 0.

Puede apreciarse en la figura del margen como al suponer seccionada la pieza y separada en dos partes, la no conexionada no puede soportar el axial distribuido. Por otra parte, sin rasante en el único conector, su enclave es de deslizamiento nulo.

N=0

Sin axial distribuido, el flector global queda solamente compensado por momentos distribuidos:

$$m_1+m_2=M(x)$$

llamando $EI_{\min} = \Sigma EI = E_1 I_1 + E_2 I_2$ se obtiene, junto con la expresión de igualdad de curvaturas:

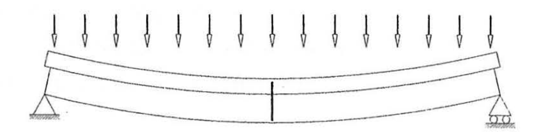
$$-y'' = \frac{m_1}{E_1 I_1} = \frac{m_2}{E_2 I_2} = \frac{m_1 + m_2}{\Sigma EI} = \frac{M(x)}{EI_{min}}$$

que muestra que la rigidez a flexión es la suma de las rigideces aportadas por cada material. Por otro lado:

$$m_1 = \frac{E_1 I_1}{EI_{\min}} \cdot M(x) \quad ; \quad m_2 = \frac{E_2 I_2}{EI_{\min}} \cdot M(x)$$

El reparto de momentos distribuidos en cada material está en proporción de las rigideces.

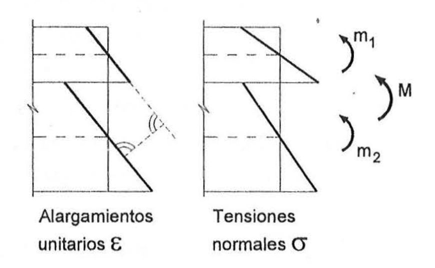
Si se trata de una jácena biapoyada sometida a carga uniforme, la flecha máxima en el centro del vano es:



$$y_{\max} = \frac{5}{384} \cdot \frac{q \cdot L^4}{EI_{\min}}$$

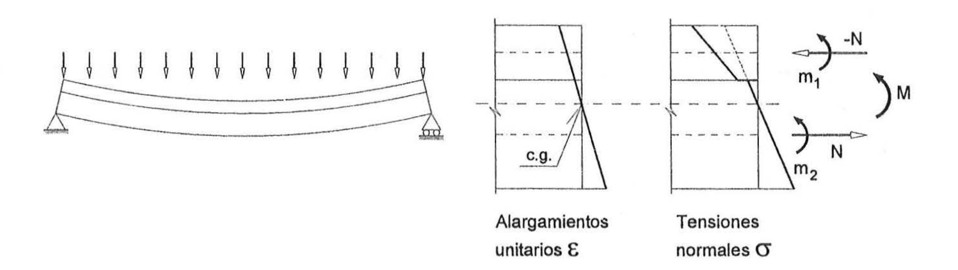
En la siguiente figura se muestran los alargamientos unitarios (ε) y las tensiones normales (σ). Los primeros(ε) son rectas paralelas (igualdad de curvaturas); debe acostumbrarse el lector a la discontinuidad en estas gráficas al trabajarse con deslizamientos. En este caso es claro que, con flector positivo, las fibras inferiores del material superior están traccionadas (alargamientos) y comprimidas (acortamientos) las fibras superiores del material inferior.

Si los módulos de elasticidad son diferentes las rectas representativas de las tensiones normales ya no resultan paralelas (σ = E ε).



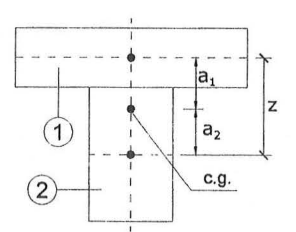
1.3.2. Límite superior: estado sin deslizamiento o de conexión completa.

Aumentando la rigidez de la conexión podemos considerar el límite cuando ésta resulte infinita: $K_{unt} = K_{ser} / s \to \infty$. La conexión no se deforma y no se produce deslizamiento. Ahora, el diagrama de alargamientos es continuo a lo largo de todos los materiales, condición que contribuye a resolver el problema de una manera simple.



Ponderando cada material por su respectivo módulo de elasticidad (E_i), el centro geométrico (c.g.) de la sección transversal queda determinado, respecto de los centros geométricos de cada material, por las distancias "a_1; a_2" mediante:

$$a_1 = z \frac{E_2\, A_2}{E_1\, A_1 + E_2\, A_2}$$
$$a_2 = z \frac{E_1\, A_1}{E_1\, A_1 + E_2\, A_2}$$
$$a_1 + a_2 = z$$



Exponemos brevemente la solución clásica (ya indicaremos diversos procedimientos para su obtención, las expresiones mostradas son también aplicables al caso de separación de materiales):

$$y'' = -\frac{M(x)}{EI_{\max}} \quad ; \quad EI_{\max} = E_1\, I_1 + E_2\, I_2 + E_1\, A_1\, a_1^2 + E_2\, A_2\, a_2^2$$
$$N = \frac{E_1\, A_1\, a_1}{EI_{\max}} M(x) = \frac{E_2\, A_2\, a_2}{EI_{\max}} M(x)$$
$$m_1 = \frac{E_1\, I_1}{EI_{\max}} M(x) \quad ; \quad m_2 = \frac{E_2\, I_2}{EI_{\max}} M(x)$$
$$Q = \frac{E_1\, A_1\, a_1}{EI_{\max}} V(x) = \frac{E_2\, A_2\, a_2}{EI_{\max}} V(x) \quad ; \quad Q_{conector} = Q\, s$$

La rigidez a flexión es "EI_{max}" y corresponde a la aplicación del "Teorema de Steiner". La ganancia respecto del estado de conexión nula, en general bastante elevada, es:

$$EI_{\max} - E\, I_{\min} = E_1\, A_1\, a_1^2 + E_2\, A_2\, a_2^2$$

En el caso de viga biapoyada sometida a carga uniforme, la flecha máxima en el centro del vano es:

$$y_{\max} = \frac{5\, q\, L^4}{384\, EI_{\max}}$$

Respecto al estado de conexión nula, una parte del flector ha sido asumida por el axial distribuido (N z) disminuyendo en consecuencia los momentos distribuidos y con ellos la curvatura. La respuesta resistente mejora pasando a un estado de flexión compuesta en cada material.

Puede mostrarse que la parte de momento global "M – N z" que compensan los momentos distribuidos se reparte en proporción a las rigideces a flexión de cada material:

$$m_1 = \frac{E_1\, I_1}{\sum EI}(M - N\, z) \quad ; \quad m_2 = \frac{E_2\, I_2}{\sum EI}(M - N\, z)$$

y que la parte del flector asumida por el par del axial distribuido (N z) es:

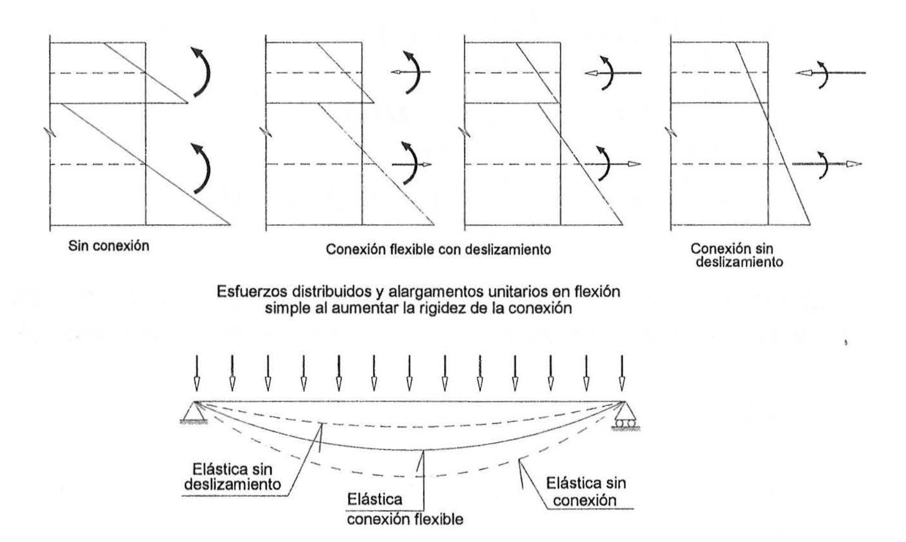
$$N\,z = \frac{EI_{max} - EI_{min}}{EI_{max}} M$$

También ha sido una herramienta clásica el homogeneizar la sección a uno de los materiales mediante el coeficiente de equivalencia entre los módulos de elasticidad ("$n = E_1 / E_2$" o la inversa).

Posteriormente, al resumir el procedimiento simplificado de EC-5, veremos que con conexión flexible los resultados son similares, pero trabajando con una rigidez eficaz a flexión menor (EI_{ef}), comprendida entre los estados de conexión nula y completa, y con una sección "penalizada por el deslizamiento". En breve recordaremos este procedimiento.

1.3.3. Variación cualitativa de la respuesta con la rigidez de la conexión.

Según se aumente la rigidez de conexión, los estados bajo cosido flexible mostrarán una evolución, como se muestra en la siguiente figura, desde el estado de conexión nula hasta la completa.



Los momentos en cada material se reducen a la vez que aumenta el axial cuyo momento compensa un mayor flector. Se parte de un estado con fibras neutras en cada material hasta llegar a estados con sólo una fibra neutra.

Las curvaturas (iguales en cada material) disminuyen y consecuentemente la elástica. En el límite del estado sin deslizamiento (conexión de rigidez infinita) no se produce discontinuidad en el diagrama de alargamientos unitarios. En los diagramas de tensiones normales la discontinuidad siempre es posible debido al cambio de módulos de elasticidad ($\sigma = E\,\varepsilon$).

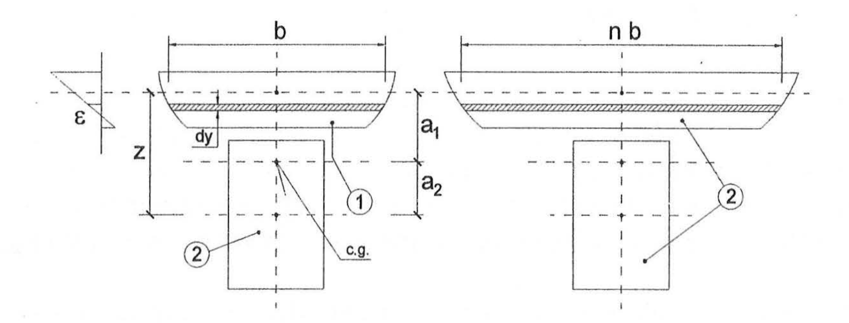
1.4. La sección homogeneizada

La sección homogeneizada es un recurso que habitualmente se ha utilizado en la estructura mixta entre hormigón y acero. Consiste en reemplazar la sección original de varios materiales por otra de un solo material tomado como referencia "trucando" la geometría de los restantes. En la "sección homogeneizada" de un solo material se obtienen iguales esfuerzos y rigideces, si

bien debe deshacerse la analogía en el cálculo de tensiones de los materiales homogeneizados.

El procedimiento puede aplicarse "con o sin deslizamiento" y no debe confundirse con la "sección penalizada" que posteriormente se verá al estudiar el método de EC-5.

Recordemos de manera sencilla el fundamento. Consideremos la siguiente figura (en la izquierda la sección original y en la derecha la homogeneizada) y homogeneicemos el material "1" del ala al "2" del alma:



Tomemos una rebanada de espesor infinitesimal cuyas fibras están sometidas a un alargamiento unitario "ε" desarrollando una tensión "$\sigma_1 = E_1\, \varepsilon$". La resultante de estas tensiones es "$dR = E_1\, \varepsilon\, b\, dy$" pudiéndose escribir utilizando el "coeficiente de equivalencia" $n = E_1 / E_2$:

$$dR = E_1\, \varepsilon\, b\, dy = E_2\, \varepsilon \frac{E_1}{E_2} b\, dy = E_2\, \varepsilon\, (n b)\, dy$$

Lo que equivale a establecer en la sección homogeneizada de un solo material una rebanada con ancho proporcional "n b" manteniendo un mismo alargamiento "ε". Ambas franjas infinitesimales suponen un sistema de fuerzas equivalente (igual resultante como vector deslizante). Al integrar las tensiones en ambas secciones se deben, pues, obtener iguales esfuerzos distribuidos y globales de axial y flector. Además se mantienen los alargamientos y por tanto la curvatura y la rigidez a flexión e, igualmente, las rigideces a axial en cada material y la total.

Bajo el punto de vista geométrico se ha realizado una semejanza en una dirección que no ha modificado la posición del centro geométrico de la sección del material homogenizado manteniéndose el brazo "z". Para el área (A) y el momento de inercia (I) puede establecerse: $A_{1,h} = n\, A_1$; $I_{1,h} = n\, I_1$; en donde el subíndice "h" se utiliza para hacer referencia a la sección homogeneizada (y el numérico para el material).

El centro geométrico de la sección homogeneizada está localizado por:

$$a_1 = z \frac{A_2}{A_{1,h} + A_2} \;\; ; \;\; a_2 = z \frac{A_{1,h}}{A_{1,h} + A_2} \;\; ; \;\; a_1 + a_2 = z$$

de donde se obtiene:

$$a_1 = z \frac{A_2}{A_{1,h} + A_2} = z \frac{A_2}{n\, A_1 + A_2} = z \frac{E_2\, A_2}{E_1 A_1 + E_2 A_2} \;\; ; \;\; a_2 = z \frac{A_{1,h}}{A_{1,h} + A_2} = z \frac{n\, A_1}{n\, A_1 + A_2} = z \frac{E_1\, A_1}{E_1 A_1 + E_2 A_2}$$

que equivale al centro geométrico ponderando cada material por su correspondiente módulo de Young. Para el momento de inercia de la sección homogeneizada respecto de su c.g. resulta:

$$I_h = I_{1,h} + I_2 + A_{1,h}\,a_1^2 + A_2\,a_2^2 = n\,I_1 + I_2 + n\,A_1\,a_1^2 + A_2\,a_2^2$$

Si se trata de una pieza sin deslizamiento, en la sección homogeneizada con un solo material (el "2") la rigidez a flexión será:

$$EI_{\max} = E_2\left(n\,I_1 + I_2 + n\,A_1\,a_1^2 + A_2\,a_2^2\right) = E_1\,I_1 + E_2\,I_2 + E_1\,A_1\,a_1^2 + E_2\,A_2\,a_2^2$$

que es la expresión que se citó anteriormente para la conexión completa. Continuando con el estado de conexión completa, en un caso de flexión simple, la continuidad de los alargamientos permite establecer a partir de la pendiente del diagrama de alargamientos: $\varepsilon_i / a_i = M / EI_{max}$ siendo "ε_i" los alargamientos a nivel de los centros de cada material. El axial distribuido será por tanto : $N = A_i\,E_i\,\varepsilon_i = A_i\,E_i\,a_i\,M / EI_{max}$ y el rasante $Q = dN/dx = A_i\,E_i\,a_i\,V / EI_{max}$.

Finalmente, advertir que las tensiones deben determinarse en la sección original o bien deshaciendo la equivalencia:

$$\varepsilon = \frac{\sigma_1}{E_1} = \frac{\sigma_{1,h}}{E_2} \;\rightarrow\; \sigma_1 = n\,\sigma_{1,h}$$

Por tanto, las tensiones reales son "n" veces las de la sección del material homogeneizado.

1.5. Métodos para el análisis

En este texto sólo trataremos los procedimientos basados en ecuaciones diferenciales. Además de ser sustento de otros procedimientos aportan dos destacables ventajas. Por un lado permiten visualizar de manera clara y directa la relevancia de las diferentes variables. Por otro, aportan soluciones analíticamente sencillas para algunos modelos frecuentes en la práctica. Estos aspectos los trataremos en los próximos dos temas.

En situaciones más complejas (o que no cabe tratar la conexión como un continuo) pueden perder eficacia práctica siendo preferible recurrir a procedimientos numéricos. Una posibilidad son los modelos basados en elementos finitos específicamente desarrollados considerando el deslizamiento; cabe citar entre otros, ver bibliografía, a autores como C. Amadio (1990), C. Amadio et al. (1993 y 1999) o R. Salari et al. (1998). Otro procedimiento es el de la matriz de flexibilidad de los conectores propuesto por J. Tommola y A. Jutila (2001, ref. [54]) que resulta directamente enfocado para una conexión discreta (puntual) de conectadores.

Actualmente, en la estructura mixta entre madera y hormigón la investigación está más encaminada al comportamiento a largo plazo, tanto en los teórico como en lo experimental. Cabe citar entre otros, véase la bibliografía, los trabajos de C. Amadio, A. Ceccotti, M. Fragiacomo, E. Bou Said y U. Kuhlmann y J. Schänzlin.

1.6. Conclusión

En este primer capítulo se han expuesto las oportunidades y condicionantes para el empleo de la viga mixta en los ámbitos de la obra nueva, la rehabilitación y la restauración. A las ventajas estructurales hay que añadir otras de tipo funcional como el aislamiento acústico que se consigue con los forjados mixtos entre madera y hormigón. Entre los inconvenientes hay que citar la posible necesidad de apeo, la incomodidad de la conexión para realizarla in situ y, como consecuencia de todo ello, el coste. Por otra parte, en rehabilitación y restauración puede mostrarse como una solución muy adecuada o la única factible.

También se han introducido los principales y más básicos conceptos de la estructura mixta, mostrando como el análisis, en el caso de conexión flexible con deslizamiento, desemboca en ecuaciones diferenciales. Continuaremos en los siguientes temas ampliando la faceta del análisis y ampliando los conceptos estructurales con sus repercusiones en el diseño.

Otro aspecto de notable importante que se ha mostrado es como, bajo conexión flexible, la respuesta estructural es intermedia entre los estados sin conexión (conexión nula) y sin deslizamiento (conexión completa). Entre estos estados está el rango de mejora que puede obtenerse al aumentar la rigidez de la conexión; ésta se convierte en un factor clave para el diseño de la pieza mixta. De hecho, en el siguiente tema, nos centraremos en la eficiencia que se consigue respecto del estado sin deslizamiento.

2.1. Introducción

En los anteriores capítulos se ha mostrado como la respuesta bajo conexión flexible es intermedia entre los estados sin conexión (conexión nula) y sin deslizamiento (conexión completa).

En el diseño clásico sin deslizamiento, la conexión se diseña "a posteriori", para que resista el rasante; sin embargo, bajo conexión flexible, ésta adquiere un papel determinante en la respuesta estructural. Procede pues que estudiemos el rendimiento respecto de la conexión completa orientando y racionalizando el proceso de diseño.

El análisis que se expone es un resumen de "Wood-concrete and wood-wood mixed beams: a rational basis for selecting the connections" presentado en "Proceedings of the 9th World Conference on Timber Engineering, WCTE-2006" (ref. [27]) y de la version ampliada publicada en Journal of Structural Engineering (J.L. Fdz. Cabo et al. 2008, ref. [28]).

A la hora de estudiar la eficacia hay que diferenciar, por una parte, la forma (o potencialidad) de la sección y por otra, el rendimiento conseguido según el grado de conexión.

Resulta muy revelador estudiar primero el caso en que la conexión es completa, es decir, que no hay deslizamiento en la conexión. Este caso representa uno de los límites del problema, el más favorable; el otro caso límite será el de conexión nula.

Si no se produce deslizamiento, cabe establecer la condición: $d\gamma/dx = 0 = \varepsilon_2 - \varepsilon_2 + z\, d^2y$ (ver epígrafe 1.2.2.); de la que se obtiene para el axial distribuido en el caso de conexión completa en flexión simple:

$$N_{OPT} = \frac{z\,\overline{EA}}{EI_{\max}} M$$

$$\overline{EA} = \frac{E_1 A_1 E_2 A_2}{E_1 A_1 + E_2 A_2}$$

Sin deslizamiento **Con deslizamiento**

Este valor, utilizado en la ecuación de curvaturas: $-y'' = (M - z\,N_{OPT}) / \Sigma EI$; permite a su vez obtener:

$$-y'' = M/EI_{\max} \quad ; \quad EI_{\max} = \Sigma EI + z^2\overline{EA} \quad ; \quad \Sigma EI = E_1 I_1 + E_1 I_1 = EI_{\min}$$

La rigidez a flexión con conexión completa "EI_{max}" puede también evaluarse con esta expresión en lugar de la anteriormente mencionada. El término "$z^2\overline{EA}$" es la ganancia al conectar ambos materiales mediante una conexión completa (sin deslizamiento). Cabe decir que para los momentos estáticos de cada material respecto del centro geométrico de la sección completa (ponderando cada material por su respectivo módulo de elasticidad "E_i") se puede establecer: $z\,\overline{EA} = E_1 A_1 a_1 = E_2 A_2 a_2$ (ref. [29]).

2.2. Ganancia potencial por forma de la sección

A partir de las anteriores ecuaciones pueden escribirse para el estado sin deslizamiento:

$$N_{OPT} = \alpha \frac{M(x)}{z} \quad ; \quad \alpha = \frac{EI_{\max} - EI_{\min}}{EI_{\max}} = \frac{z^2 \, \overline{EA}}{EI_{\max}} \quad ; \quad 1-\alpha = \frac{EI_{\min}}{EI_{\max}}$$

El coeficiente adimensional "α" depende de la geometría de la sección transversal y de los módulos de elasticidad de los materiales. Su valor como máximo es la unidad. Para el rasante puede establecerse: Q = dN/dx = α V(x) / z.

Bajo el punto de vista de los esfuerzos, el par del axial asume una proporción "α" del momento global M(x) y, los momentos distribuidos la restante "1 - α":

$$M = m_1 + m_2 + N_{OPT}\, z$$

$$N_{OPT}\, z = \alpha\, M = \frac{EI_{\max} - \sum EI}{EI_{\max}} M$$

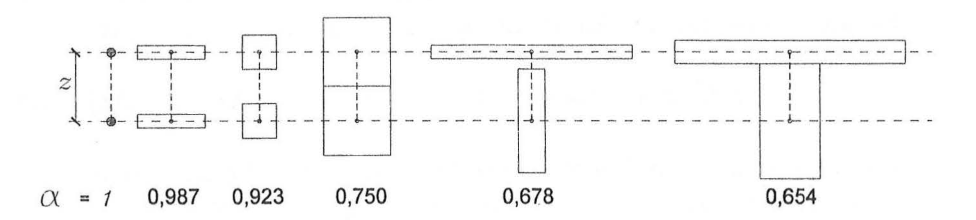
$$m_1 + m_2 = (1-\alpha) M = \frac{\sum EI}{EI_{\max}} M$$

El poder compensar un mayor flector mediante los axiales distribuidos depende del coeficiente de forma de la sección. Puede mostrarse a su vez (teniendo en cuenta la ecuación de igualdad de curvaturas), que la fracción de flector "(1 - α) M = M – N_{OPT} z", correspondiente a los momentos distribuidos (m_1 + m_2), se reparte según:

$$m_1 = \frac{E_1 I_1}{\sum EI}(M - N_{OPT}\, z) \quad ; \quad m_2 = \frac{E_2 I_2}{\sum EI}(M - N_{OPT}\, z)$$

Bajo el punto de vista de la rigidez a flexión, "α" representa la ganancia máxima con conexión completa respecto del estado de conexión nula en relación a la rigidez de la conexión completa o sin deslizamiento. A su vez, "1 - α" representa el cociente directo entre estas rigideces.

En la siguiente figura se muestran algunas proporciones de secciones considerando igual módulo de elasticidad (E) en ambos materiales (o en el caso de secciones homogeneizadas):

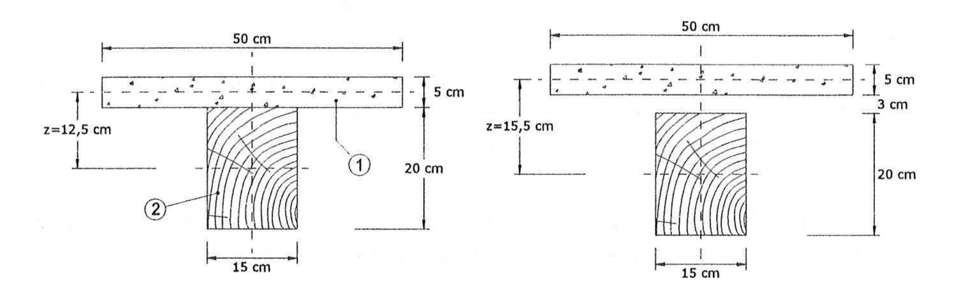


En el ámbito de la estructura mixta madera-madera y madera-hormigón, este coeficiente varía frecuentemente entre: 0,6 < α < 0,8. Valores más elevados corresponderían a otros tipos estructurales como los panales sándwich, las celosías con cordones continuos o las vigas en "I" (admitiendo en cualquier caso de separación entre materiales que el alma de unión no aporta rigidez a flexión).

Si ambos materiales tienen la misma fluencia, situación más frecuente en la estructura mixta entre maderas, el coeficiente "α" permanece constante. De no ser así, como en la estructura

madera-hormigón, resulta variable con la evolución reológica (frecuentemente esta variación es reducida).

Para fijar ideas de manera práctica considérense las siguientes secciones de forjado mixto en madera y hormigón:



El caso de la izquierda se plantea con ambos materiales en contacto y, el de la derecha, con separación algo exgerada a efectos de establecer la comparación (separaciones más habituales serían de 10 a 20 mm). Evidentemente esta segunda sección es de mayor potencial estructural sin embargo, para no perderla, deben utilizarse sistemas de conexión que no sean en exceso flexibles.

Supongamos que los módulos instantáneos frente a cargas de corta duración sean de "E_1 = 27 kN/mm²" para el hormigón (v.g de calidad HA-25) y de "E_1 = 9 kN/mm²" para la madera en calidad C-18 ($n = E_1 / E_2 = 3$).

Para la sección con contacto entre ala y alma se obtiene:

$EA = 192.857{,}14$ kN ; $\sum EI = 1.040{,}63$ kN m² ; $EI_{max} = 1.040{,}63 + 0{,}125^2 \times 192.857{,}14 = 4.054{,}02$ kN m²

$\alpha = (4.054{,}02 - 1.040{,}63) / 4.054{,}02 = 0{,}743$

En la sección con separación entre materiales son análogos "EA" y "$\sum EI$" resultado una rigidez a flexión y un parámetro de rigidez relativa α de:

$EI_{max} = 1.040{,}63 + 0{,}155^2 \times 192.857{,}14 = 5.674{,}02$ kN m² ; $\alpha = 0{,}817$

Supongamos ahora que la pieza está sometida a cargas permanentes (o casi permanentes) bajo las cuales los módulos de elasticidad, a largo plazo, fluyan a:

$E_1 = 27.000 / (1 + 2{,}5) = 7714{,}3$ N/mm² ; $E_2 = 9.000 / (1 + 0{,}6) = 5625{,}0$ N/mm²

considerando un coeficiente de fluencia de "$\varphi = 2{,}5$" para el hormigón y de "$k_{def} = 0{,}6$" para la madera. Resulta ahora: $EA_\infty = 90.000{,}00$ kN ; $\sum EI_\infty = 602{,}68$ kN m².

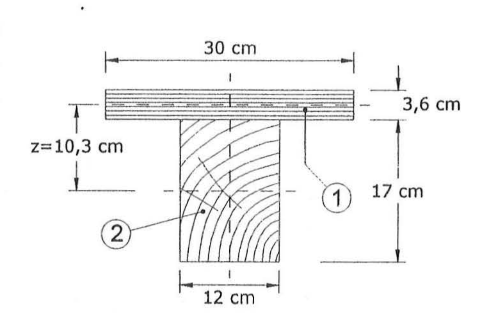
Para la sección con ambos materiales en contacto:

$(EI_{max})_\infty = 602{,}68 + 0{,}125^2 \times 90.000 = 2.008{,}93$ kN m² ; $\alpha_\infty = 0{,}700$

y para la sección con separación entre escuadra de madera y hormigón:

$(EI_{max})_\infty = 602{,}68 + 0{,}155^2 \times 90.000 = 2.764{,}92$ kN m² ; $\alpha_\infty = 0{,}782$

Veamos ahora el caso de una sección en "T" entre maderas como la representada en la figura de la izquierda. Supongamos un alma de escuadra de madera aserrada de clase C-18 con "E_2 = 9 kN/mm²" y un refuerzo de ala superior de microlaminado (LVL) que alcance un módulo elástico de "E_1 = 15 kN/mm²". Con estos módulos de Young obtiene:



EA = 86.062,5 kN ; ΣEI = 459,67 kN m²
EI_{max} = 1.372,70 kN m² ; $\alpha = 0,665$

Si ambas maderas se encuentran, como es lo frecuente, bajo una misma clase de servicio, puede admitirse para ambas un mismo coeficiente de fluencia "k_{def}" al igual que para los conectores. Por ello, a largo plazo con cargas casi permanentes resultarán parámetros "EA", "ΣEI" y "EI_{max}" dividido por "1 + k_{def}" y, evidentemente $\alpha_0 = \alpha_\infty$.

Designando por "δ_1" las flechas del estado sin deslizamiento y por "δ_3" las del estado sin conexión:

$$\Delta_{max} = \frac{1}{1-\alpha} = \frac{EI_{max}}{EI_{min}} = \frac{\delta_3}{\delta_1}$$

Se obtienen las siguientes ganancias en deformación (con frecuencia el aspecto más determinante) para los más habituales valores de "α" si se consiguiese una conexión completa:

Factor forma "α"	0,60	0,65	0,70	0,75	0,80
Ganancia de inercia por forma (Δ_{max})	**2,50**	**2,86**	**3,33**	**4,00**	**5,00**

Para secciones en "T" derivadas de forjados, el ala aporta escasa rigidez a flexión frente al alma, por lo que estos valores pueden considerarse aproximadamente referibles a la rigidez del alma o considerar, por ejemplo, valores un 10 % superiores.

El factor "α" resulta muy útil para el predimensionamiento por su reducida variabilidad en el ámbito de un mismo tipo estructural y con la reología

2.3. Eficiencia por causa de una conexión flexible

Cuando existe deslizamiento en la conexión no es posible alcanzar las máximas ganancias antes descritas, cabe ahora corregirlas mediante eficiencias. El diseño mediante conexión flexible resulta muy condicionado por ésta. Por ello es eficaz basarlo en rendimientos respecto del estado sin deslizamiento en función de los cuales se dimensiona la conexión. De esta manera, no se diseña "a ciegas" y se reduce la necesidad de un proceso iterativo.

Consideraremos como referencia el caso más frecuente de viga biapoyada (vano L) de sección constante sometida a carga uniforme (q) y conexión también uniforme.

Comencemos centrando la atención en el axial distribuido que como vimos aumenta con la rigidez de conexión mejorándose la respuesta resistente a la par que se reducen las curvaturas. El rendimiento en axial distribuido (N bajo conexión flexible y N_{OPT} con conexión completa sin deslizamiento) se puede expresar mediante:

$$\mu(s)=\frac{N}{N_{OPT}}=\frac{1}{1+\left(\frac{\pi}{\Phi}\right)^2} \qquad \text{siendo: } \Phi^2=\frac{k_{unt}\,L^2}{(1-\alpha)\overline{EA}} \quad ; \quad \overline{EA}=\frac{E_1\,A_1\,E_2\,A_2}{E_1\,A_1+E_2\,A_2}$$

que también es aplicable a los rasantes (y a las fuerzas en los conectores). Este resultado, y los que seguidamente se muestran, son exactos en el caso de carga sinusoidal y muy aproximados con carga uniforme.

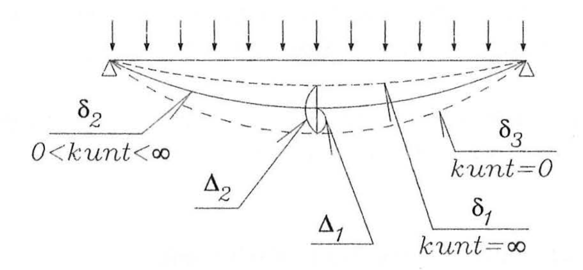
El axial puede evaluarse mediante: $N = \mu(s)\ N_{OPT} = \mu(s)\ \alpha\ M\ /\ z$ que expresa proporcionalidad respecto al flector global. Los rasantes, a su vez, resultan proporcionales al cortante: $Q = dN/dx = \mu(s)\ \alpha\ V\ /\ z$. Además, la viga se comporta como con una rigidez a flexión constante "EI_{ef}", denominada rigidez eficaz, comprendida entre "EI_{min}" y "EI_{max}" y expresable (obtención a partir de la ecuación de las curvaturas, ref. [28],[29]):

$$EI_{ef}=\frac{\Sigma EI}{1-\alpha\,\mu(s)}=\frac{(1-\alpha)EI_{max}}{1-\alpha\,\mu(s)}$$

También los momentos distribuidos resultan proporcionales al flector: $m_i = (E_i\ I_i)\ (M - N\ z)\ /\ \Sigma EI = E_i\ I_i\ M\ /\ EI_{ef}$.

Adviértase que el parámetro Φ es adimensional y que: $0<\Phi<\infty$. Para conexión nula: $k_{unt} \to 0$; $\Phi \to 0$ y $\mu(s) \to 0$. Para conexión completa: $k_{unt} \to \infty$; $\Phi \to \infty$ y $\mu(s) \to 1$.

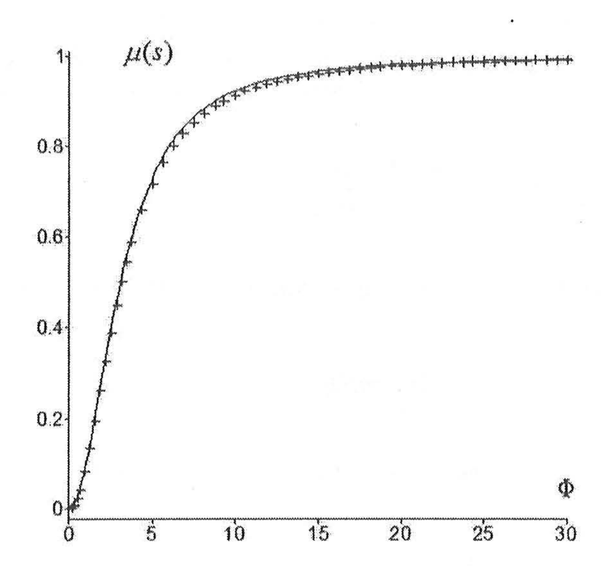
Continuemos ahora con el estudio de deformaciones. En la siguiente figura se muestran las elásticas en los casos de conexión completa o sin deslizamiento (δ_1, rigidez EI_{max}, $k_{unt} = \infty$), de conexión nula (δ_3, rigidez $EI_{min} = \Sigma EI$, $k_{unt} = 0$) y el caso intermedio de conexión flexible (δ_3, rigidez $\Sigma EI < EI_{eficaz} < EI_{max}$):



La máxima ganancia posible en flecha es "δ_3 - δ_1" y la realmente conseguida "δ_3 - δ_2". Cabe establecer la eficiencia "$\mu_2(d)$" entre estas dos cantidades comprobándose que se obtiene el mismo resultado que para el axial:

$$\mu_2(d)=\frac{\delta_3-\delta_2}{\delta_3-\delta_1}=\frac{1}{1+\frac{\pi^2}{\Phi^2}}=\mu(s) \quad ; \quad \Phi^2=\frac{k_{unt}\,L^2}{(1-\alpha)\overline{EA}}$$

La representación de estas eficiencias, $\mu(s)$ y $\mu_2(d)$, en función del parámetro Φ es:



En continuo se refleja la solución exacta para la carga uniforme y en cruces la aproximación en basa a la extrapolación de los resultados con carga sinusoidal. La aproximación es más que razonable (queda a favor de la seguridad) y simplifica las expresiones de los resultados.

De forma práctica puede considerarse que hasta un valor de $\Phi \approx\leq 5$, la ganancia es aproximadamente lineal (en Φ proporcional a $K_{unt}^{1/2}$). Entre $5 \approx\leq \Phi \approx\leq 10$ la mejora con el aumento de la rigidez de conexión resulta cada vez más desfavorable. A partir de $\Phi \approx\geq 10$ resultan excesivas las necesidades de aumento de la rigidez de conexión para conseguir mejoras poco significativas.

Es también conveniente fijarse en la expresión de Φ:

$$\Phi^2 = \frac{k_{unt}\, L^2}{(1-\alpha)\overline{EA}} \quad ; \quad \Phi = \sqrt{k_{unt}}\,\frac{L}{\sqrt{(1-\alpha)\overline{EA}}}$$

y cómo influye el vano y los parámetros de sección. Fijado el vano y la sección, el parámetro Φ resulta proporcional a $\sqrt{k_{unt}}$. En cuanto al vano (L), una misma sección, a igualdad de flector máximo, es más eficaz salvando vanos largos con menor carga que vanos más cortos con menor carga. A efectos de sección, el parámetro decisivo es el producto $(1-\alpha)\overline{EA}$ ofreciendo en general más repercusión el segundo factor.

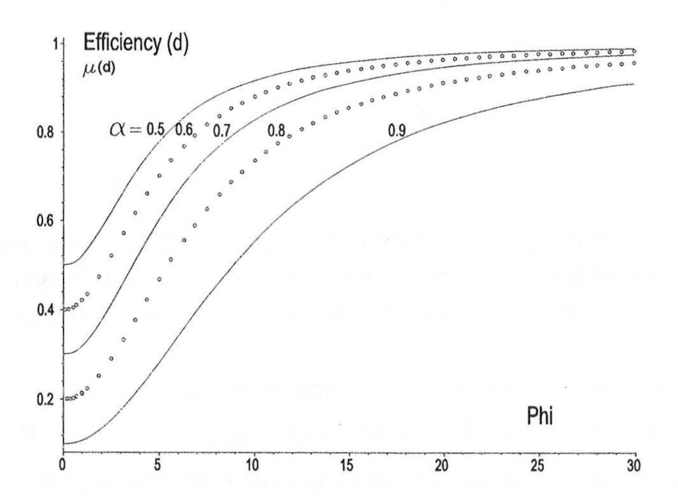
En forjados, con clavijas verticales (usualmente tirafondos o barras encoladas) y materiales contacto (o no excesivamente separados), puede tomarse como referencia de este rendimiento para un adecuado diseño, valores entre el 60 % y el 80 % en estados límites últimos utilizando "2 K_{ser} / 3" y del 65 % al 85 % en servicio considerando "K_{ser}" sin reducción. No suele ser adecuado concentrar más este tipo de conexión para conseguir mejor rendimiento, llevando el diseño de la conexión hasta su límite constructivo e incrementando excesivamente el coste; es preferible aumentar la sección.

Con conexiones más rígidas, como las clavijas inclinadas o almas metálicas (de diversos tipos) encoladas en acanaladuras, pueden obtenerse eficiencias superiores, del orden del 90 y 95 % o algo mayores, prácticamente conexiones completas.

Finalmente estudiemos el rendimiento en deformación, que suele ser el más condicionante, de una manera más directa y práctica para el diseño, mediante el cociente en flechas o rigideces a flexión entre los estados sin deslizamiento y con conexión flexible; para el que se obtiene:

$$\mu_1(d) = \frac{\delta_1}{\delta_2} = \frac{EI_{ef}}{EI_{max}} = \frac{(\pi^2 + \Phi^2)(1-\alpha)}{\pi^2 + (1-\alpha)\Phi^2}$$

La representación gráfica de μ_1(d) en función de Φ para diferentes valores de α es:

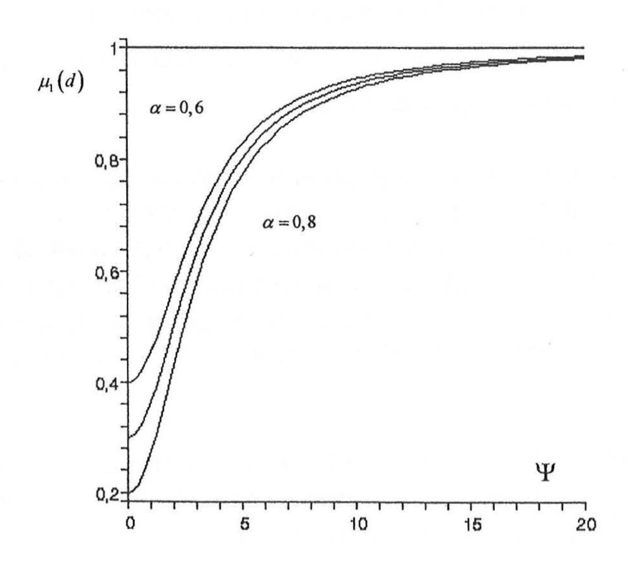


En este caso puede resultar más claro considerar el parámetro Ψ :

$$\Psi^2 = (1-\alpha)\Phi^2 = \frac{k_{unt} L^2}{EA}$$

$$\mu_1(d) = \frac{\delta_1}{\delta_2} = \frac{EI_{ef}}{EI_{max}} = \frac{(1-\alpha)\pi^2 + (1-\alpha)\Phi^2}{\pi^2 + (1-\alpha)\Phi^2} = \frac{(1-\alpha)\pi^2 + \Psi^2}{\pi^2 + \Psi^2}$$

para segregar completamente el parámetro de potencialidad "α". La representación gráfica de $\mu_1(d)$ en función de Ψ para diferentes valores de α = 0,6 – 0,7 – 0,8 es:



Los valores de esta eficiencia resultan menores que los anteriores. Para las situaciones que se han citado, este rendimiento oscila entre un 60 % y un 75 % (en servicio).

Para analizar la ganancia en deformación con conexión flexible respecto al estado sin conexión podemos establecer:

$$\Delta_{real} = \frac{EI_{ef}}{EI_{\min}} = \frac{\delta_3}{\delta_2} = \frac{\delta_1}{\delta_2}\frac{\delta_3}{\delta_1} = \mu_1(d)\,\Delta_{\max}$$

En los casos más habituales de "α" la ganancia en forjados con conexión flexible mediante clavijas verticales es del orden de $1,8 < \Delta_{real} < 3$.

2.4. Ejemplo

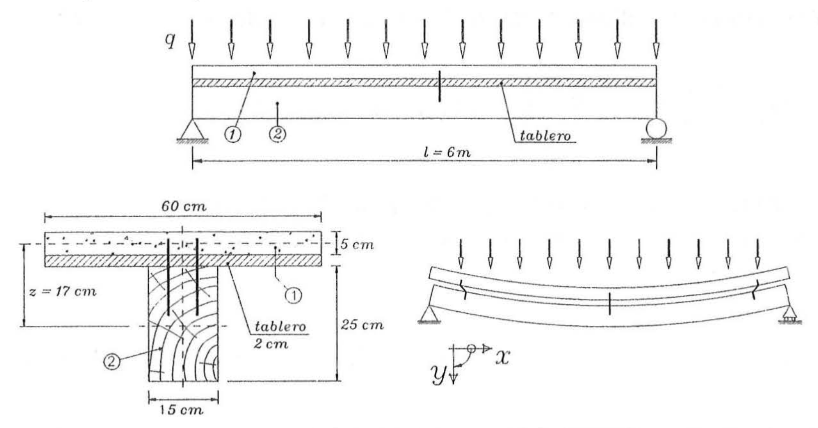
Se incluye seguidamente un ejemplo para mostrar de manera práctica la teoría expuesta en este capítulo y como el cálculo y el diseño pueden orientarse corrigiendo el estado sin deslizamiento mediante eficiencias en base a las cuales se propone la conexión reduciéndose el proceso iterativo.

Parte de este ejemplo ha sido expuesto en "Wood-concrete and wood-wood mixed beams: a rational basis for selecting the connections" publicado en Journal of Structural Engineering, ASCE, 2008 (ref. [28]).

Estudiaremos el caso de un forjado con vigas de madera y capa de compresión o solera en hormigón. Por brevedad y mayor claridad, sólo se contemplará una comprobación de resistencia y otra de deformación. En posteriores capítulos veremos cuestiones que por ahora se evitan y se propondrá un protocolo detallado de cálculo.

Consideraremos un espesor mínimo constructivo de hormigón de 5 cm, separado de las vigas por un tablero (encofrado perdido) de 2 cm de grueso para el que no supondremos capacidad estructural. Despreciaremos los efectos de la retracción y tampoco analizaremos la posible entrada en tracción del hormigón. El forjado se construye con apeo suficientemente denso por lo que todas las acciones las asume el conjunto mixto tras el descimbrado.

Supondremos limitado el canto total del forjado a 32 cm, restando un canto de 25 cm para las vigas de madera. El vano es de 6 m. Establecemos una sobrecarga de uso de 3 kN/m² y una carga permanente de 4 kN/m² incluyendo el peso propio de los elementos estructurales. Seguidamente se incluye un esquema.



Primero se acomete el predimensionado y seguidamente la comprobación de la sección estudiando la conexión. Para la práctica es conveniente expresar el parámetro Φ en función de los rendimientos respecto al estado sin deslizamiento. Las expresiones son:

$$\mu(s)=\frac{N}{N_{OPT}}=\mu_2(d)=\frac{\delta_3-\delta_2}{\delta_3-\delta_1}=\left(1+\frac{\pi^2}{\Phi^2}\right)^{-1} \rightarrow \Phi^2=\pi^2\frac{\mu(s)}{1-\mu(s)}$$

$$\mu_1(d)=\frac{\delta_1}{\delta_2}=\frac{EI_{ef}}{EI_{\max}}=\frac{(\pi^2+\Phi^2)(1-\alpha)}{\pi^2+(1-\alpha)\Phi^2} \rightarrow \Phi^2=\pi^2\frac{\mu_1(d)-(1-\alpha)}{(1-\alpha)\left[1-\mu_1(d)\right]}$$

Es también útil contar con las expresiones:

$$EI_{ef}=\frac{\sum EI}{1-\alpha\,\mu(s)} \rightarrow \mu(s)=\frac{1}{\alpha}\left(1-\frac{\sum EI}{EI_{ef}}\right) \; ; \; \mu_2(d)=\frac{1-\alpha}{1-\alpha\,\mu(s)}$$

Finalmente, recordamos que:

$$N_{OPT}=\alpha\frac{M}{z} \; ; \; \alpha=\frac{z^2\,\overline{EA}}{EI_{\max}}=\frac{EI_{\max}-\sum EI}{EI_{\max}} \; ; 1-\alpha=\frac{\sum EI}{EI}$$

$$\phi^2=k_s\frac{EI_{\max}\,L^2}{\sum EI\,\overline{EA}}=\frac{k_{unt}\,L^2}{(1-\alpha)\overline{EA}} \rightarrow k_s=\Phi^2(1-\alpha)\frac{\overline{EA}}{L^2}$$

<u>a.1.-Predimensionamiento por resistencia</u>

Trabajaremos por unidad de ancho de forjado y con los criterios de mayoración de acciones de EC-5 y CTE. La carga de cálculo y el momento flector máximo son:

$$q_d=1{,}35\times4+1{,}5\times3=9{,}9\,kN/m^2 \; ; \; M_{d,\max}=9{,}9\times6^2/8=44{,}55\,mkN/m$$

Tomaremos un coeficiente de forma "α = 0,75" y un rendimiento de axial "μ(s) = 0,7", no excesivamente alto para poder solucionar la conexión de manera más práctica con clavijas verticales. El axial distribuido se estima en:

$$N=\mu(s)\alpha\,M/z=0{,}7\times0{,}75\times44{,}55/0{,}17=137{,}6\,kN/m$$

La rigidez a flexión de la capa de hormigón es muy reducida frente a la de la viga (máxime en estado diferido si, como suele ser habitual, la fluencia del hormigón es superior a la de la madera). Estimando esta última en un 90 % sobre $\sum$EI puede establecerse:

$$M_2=\frac{E_2\,I_2}{\sum EI}(M-z\,F)\approx0{,}9\times(44{,}55-137{,}6\times0{,}17)=19{,}04\,m\,kN/m$$

Abreviadamente consideraremos solamente la hipótesis de carga permanente y sobrecarga. Con madera C-18 en clase de servicio "1", las resistencias de cálculo a tracción pura y en flexión simple son:

$$f_{t,0,d}=11\times0{,}8/1{,}3=6{,}77\,kN/mm^2 \; ; \; f_{m,0,d}=18\times0{,}8/1{,}3=11{,}08\,kN/mm^2$$

Admitiendo una interacción axial-flexión mediante suma de índices de aprovechamiento de cada esfuerzo actuando en solitario, puede establecerse para el agotamiento de la madera (A: área de madera en mm²/m):

$$1=\frac{137.600}{A\times 6,77}+\frac{6x19.040}{A\times 0,25\times 11,08}\rightarrow A=\frac{137.600}{6,77}+\frac{6\times 19.040}{0,25\times 11,08}=61.567\,mm^2/m$$

Matizaremos posteriormente este índice de agotamiento. Esta cantidad de madera viene a equivaler a escuadrías de "150 x 250 mm" cada 0,6 m (A = 150 x 250 / 0,6 = 62.500 mm²/m).

a.2.-Predimensionamiento por deformación

El estudio por deformación lo limitaremos a la condición de que la flecha diferida máxima sea de "600 / 300 = 2 cm" bajo la acción de las cargas del tipo casi permanente. Esta condición es una de las exigidas por CTE bajo el concepto de "apariencia de la obra". El valor de la carga es:

$$q(casi\ permanente)=G+\psi_2\,Q=4+0,3\times 3=4,9\,kN/m^2$$

Volviendo a trabajar por unidad de ancho de forjado, la rigidez a flexión necesaria es:

$$EI_{ef}=\frac{5\times 4,9\times 6^4}{384\times 0.02}=4.134\,kN\,m^2/m$$

Suele ser habitual tomar valores inferiores de la rigidez de conexión para las comprobaciones de resistencia frente a las de servicio en previsión de que ésta entre en un régimen no lineal. Por otra parte hay que tener en cuenta los efectos de la fluencia que se comentarán posteriormente. En principio supondremos que se alcanza un rendimiento en axial de "$\mu(s)$ = 0,8" manteniendo "α = 0,75", aproximando "$\Sigma EI \sim 1,1\ E_2\ I_2$" se obtiene:

$$EI_{ef}=4.134\,kN\,m^2/m=\frac{\sum EI}{1-\alpha\,\mu(s)}\approx\frac{1,1\,E_2\,I_2}{1-\alpha\,\mu(s)}$$
$$E_2\,I_2\approx(1-0,75\times 0,8)\ 4.134/1,1=1503\,kN\,m^2/m$$

Con estos parámetros, los rendimientos en deformación que estamos admitiendo son:

$$\mu(s)=0,8\ ;\ \mu_1(d)=(1-0,75)/(1-0,75\times 0,8)=0,625$$

Con un módulo de elasticidad inicial (y frente a cargas de corta duración) para la madera de $E_{0,medio}$ = 9 kN/mm² y coeficiente de fluencia "k_{def} = 0,6" (clase de servicio 1), su módulo diferido es: $E_{b,\infty}$ = 9 / (1 + 0,6) = 5,62 kN/mm².

Siendo "A(mm²/m)" el área necesaria de madera:

$$E_2I_2=5,62\times A\times 0,25^2/12=1503\,kN\,m^2/m$$
$$A=\frac{12\times 1503}{5,62\times 0,25^2}=51.348\,mm^2/m$$

Condición menos exigente que la encontrada anteriormente.

b.1.-Comprobación de resistencia en el estado inicial

Para la exposición resulte sencilla, la comprobación de resistencia la haremos con los módulos de elasticidad iniciales sin fluencia con valores de "E_2 = 9 kN/mm²" y "E_1 = 27 kN/mm²" (de un hormigón de 25 MPa). La separación de vigas a 60 cm la admitiremos como ancho eficaz.

La carga y el máximo momento flector de cálculo son:

$$q_d = 9,9 \times 0,6 = 5,94\, kN/m \;;\; M_{d,\max} = 0,6 \times 44,55 = 26,73\, m\, kN$$

Los parámetros básicos de la sección toman los valores:

$$E_1 A_1 = 810.000\, kN;\; E_2 A_2 = 337.500\, kN \;;\; EA = E_1 A_1\, E_2 A_2 / \left(E_1 A_1 + E_2 A_2\right) = 238.235\, kN$$
$$E_1 I_1 = 810.000 \times 0,05^2/12 = 168,7\, m^2\, kN \;; E_2 I_2 = 337.500 \times 0,25^2/12 = 1757,8\, m^2\, kN$$

Las rigideces a flexión de los estados sin conexión y sin deslizamiento y el coeficiente de forma o rigidez relativa "α" son, respectivamente:

$$\sum EI = 168,7 + 1757,8 = 1926,5\, m^2\, kN \;\; ; \;\; EI_{\max} = 1926,5 + 238.235 \times 0,17^2 = 8.811,5\, m^2\, kN$$
$$\alpha = \left(8811,5 - 1926,5\right)/8811,5 = 0,7814$$

El axial puede escribirse en función del rendimiento conseguido por la unión mediante:

$$N = \mu(s) \times 0,7814 \times 26,73/0,17 = 122,86\; \mu(s)\; kN$$

Por otro lado, el momento flector distribuido que afecta a la viga de madera es:

$$M_2 = \frac{E_2 I_2}{\sum EI}\left(M - N z\right) = \frac{1757,8}{1926,5}\left[26,73 - 122,86 \times 0,17 \times \mu(s)\right]$$
$$M_2 = 24,39 - 19,06\; \mu(s)$$

La comprobación para la madera sería peor a largo plazo si presenta mayor fluencia en el hormigón y debido a la fluencia de la propia conexión (en su unión con ambos materiales). Además, no se están teniendo en cuenta los efectos de la fisuración del hormigón (y de la retracción). Por ello, para obtener un resultado más realista, rebajaremos el índice de agotamiento de la viga a "0,95". Podemos escribir:

$$0,95 = \frac{122.800\; \mu(s)}{150 \times 250 \times 6,77} + \frac{6.000\left[24,39 - 19,06\; \mu(s)\right]}{150 \times 250 \times 0,25 \times 11,08}$$

De donde se obtiene que es preciso un rendimiento Ω = 74,34 % que supone una rigidez de cosido de:

$$\Phi^2 = \pi^2 \frac{\mu(s)}{1 - \mu(s)} = 28,59 \;\; ; \;\; k_{unt} = \Phi^2\left(1 - \alpha\right)\frac{\overline{EA}}{L^2} = 28,59 \times (1 - 0,7814) \times 238.235 \times 10^3/6000^2 = 41,36\, N/mm^2$$

Algunas normas, como EC-5, proponen reducir los módulos de deslizamiento para los cálculos de resistencia en "2/3" en previsión de que el conector entre en fase no lineal. Bajo este supuesto simplificado exigimos una rigidez de cosido de:

$$k_{unt} = 3 \times 41,4/2 = 62,04\, N/mm^2$$

b.2.-Comprobación de la deformación bajo carga casi permanente

La comprobación de deformación la limitaremos al caso de una flecha máxima diferida de "2 cm" bajo las acciones de tipo casi permanente; como se hizo en el predimensionamiento (condición de apariencia de la obra s/ CTE).

La combinación de carga casi permanente y la rigidez necesaria son:

$$q = 4,9 \times 0,6 = 2,94\, kN/m \; ; \; EI_{ef} = \frac{5 \times 2,94 \times 6^4}{384 \times 0,02} = 2480,6\, kN\, m^2$$

Consideraremos un coeficiente de fluencia de "$\varphi(t_0,\infty)$ = 2,5" para el hormigón y de "k_{def} = 0,6" para la madera. Los parámetros básicos de la sección son ahora:

$$E_1 A_1 = 810.000/(1+2,5)\, kN;\; E_2 A_2 = 337.500/(1+0,6)\, kN \; ; \; EA = 110.354\, kN$$
$$E_1 I_1 = 168,7/3,5 = 48,2\, m^2\, kN \; ; \; E_2 I_2 = 1757,8/1,6 = 1098,6\, m^2\, kN$$

Las rigideces a flexión de los estados sin conexión y sin deslizamiento y el parámetro "α" son, respectivamente:

$$\sum EI = 1146,8\, m^2\, kN \; ; \; EI_{max} = 1146,8 + 110.354 \times 0,17^2 = 4336,0\, m^2\, kN$$
$$\alpha = (4336,0 - 1146,8)/4336,0 = 0,7355$$

El rendimiento en deformación y el necesario parámetro "ϕ" son:

$$\mu_1(d) = \frac{1480,6}{4336,0} = 0,5721 \; ; \; \Phi^2 = \pi^2 \frac{0,5721 - (1 - 0,7355)}{(1 - 0,7355)[1 - 0,5721]} = 26,82$$

De manera alternativa, podemos comprobar el resultado, como se hizo en la fase de predimensionamiento a partir de "μ(s)", mediante:

$$\mu(s) = \frac{1}{\alpha}\left(1 - \frac{\sum EI}{EI_{ef}}\right) = \frac{1}{0,7355}\left(1 - \frac{1146,8}{2480,6}\right) = 0,7311$$
$$\phi^2 = \pi^2 \mu(s)/(1 - \mu(s)) = 26,82$$

Este parámetro conduce a una rigidez de cosido de:

$$k_{unt} = \Phi^2 (1-\alpha)\frac{EA}{L^2} = \frac{26,82 \times (1 - 0,7355) \times 110.354 \times 10^3}{6000^2} = 21,75\, N/mm^2$$

La conexión habrá sufrido también un proceso de fluencia en los tramos de anclaje en cada material. Considerando la misma fluencia en "k_{unt}" que en la madera podemos valorar las necesidades de cosido en "k_{unt} = 21,75 x 1,6 = 34,8 N/mm²".

Debido a la fluencia debe hacerse notar la importancia en el descenso del parámetro de axial "EA". Este descenso compensa la sensible disminución del parámetro de forma "α" y la fluencia de la conexión. En general, en estos forjados mixtos, la adicional demanda de resistencia a largo plazo en la madera suele ser pequeña. Si se tratase de una viga mixta con igual reología para ambos materiales y para la conexión, la comprobación de resistencia en estado inicial y diferido sería la misma y la deformación final sería la inicial más la correspondiente al común factor de fluencia.

c.-Diseño de la conexión

Nos basaremos en "Stud shear connection design for composite concrete slab an wood beams" de Piero Gelfi et al. (2002, ref. [31]). Utilizaremos la expresión simplificada (para las maderas y hormigones habituales) de la rigidez para clavijas verticales contemplando la separación de materiales (en el artículo puede consultarse otras expresiones de mayor precisión en función de las características de los materiales y se resumirán en el siguiente capítulo):

$$k_{ser}\left(\frac{N}{mm}\right) = \frac{124.000\ d(mm)}{\left(4,34 + {t(mm)}/{d(mm)}\right)^3}$$

Siendo "t" la separación (20 mm) y "d" el diámetro de la clavija. Para un conector d=16 mm reultaría poco recubrimiento en la capa de hormigón, si como es deseable se ancla con al menos tres diámetros. Para d=12 mm resulta k_{ser} = 6866 N/mm. La separación de los conectores sería "s = 6866 / 62,04 ~ 110 mm" o bien disponiendo parejas cada 22 cm.

Como veremos, cabe el recurso de optar por una separación variable a lo largo de la viga con los conectores más distanciados en la mitad central del vano y más próximos en los cuartos extremos suponiendo una separación equivalente constante bajo los criterios de EC-5. Con ello se mejora la condición de resistencia de los conectores al estar más próximos en los extremos donde es máximo el esfuerzo rasante.

Hagamos un último estudio de la capacidad resistente. Manteniendo la solución constructiva de clavijas verticales, veamos que rigideces de cosido (k_{unt}) podemos conseguir en función del diámetro y la separación a partir de la menciaonada expresión de P. Gelfi et al:

Valores de k_{unt} (N/mm²)

d	*s (mm)*				
(mm)	*80*	*100*	*120*	*150*	*200*
10	40,55	32,44	27,03	21,63	16,22
12		45,77	38,14	30,52	22,89
14			50,24	40,19	30,15

Se ha obtenido una resistencia a flector M_d = 26,73 m/kN con un rendimiento Ω = 74,34 % ligado a un parámetro ϕ = 5,35 con k_{unt} = 41,36 N/mm². Supongamos una unión próxima al límite constructivo con parejas de conectores relativamente próximos hasta conseguir k_{unt} = 80 N/mm². Con esta rigidez se obtiene ϕ = 7,44; un rendimiento de axial $\mu(s)$ = 84,86 % y una capacidad resistente (manteniendo un 95 % de aprovechamiento en la madera) de M_d = 28,69 m/kN que

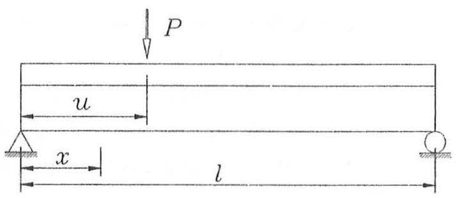
no supone un notable incremento. Un aumento más apreciable supondría recurrir a otros sistemas de unión más rígidos, v.g. con conectores inclinados. No obstante, el tope estructural, con conexión sin deslizamiento, es de M_d = 32,08 m/kN.

En definitiva, el dimensionamiento puede realizarse a partir del estado sin deslizamiento ponderándolo por los correspondientes objetivos de eficiencia en función de los cuales se obtiene el diseño de la unión. Eficiencias bajas pueden conducir a un desaprovechamiento de los materiales. En cambio, eficiencias demasiado altas pueden conducir a cosidos densos y poco constructivos con escaso beneficio adicional en la respuesta estructural. El ejemplo también muestra como, en una considerable proporción, puede evitarse el procedimiento iterativo.

2.5. Viga biapoyada con carga puntual y conexión de rigidez uniforme

Para completar este capítulo expondremos brevemente este modelo que es interesante para la práctica. Es el caso presentado N. M. Newmark et al. (1951, ref. [45]) junto con la ecuación diferencial que se citó en el anterior tema.

Aquí lo expondremos manteniendo el formato de variables que venimos utilizando bajo un enfoque de rendimiento (solución propuesta en la ref. [29])



Las reacciones, los momentos flectores (M) y esfuerzos cortantes (i: a izquierda de la carga, d: a la derecha de ésta) son:

$$R_i = P(l-u)/l \;;\; R_d = P\,u/l$$
$$M_i(x) = R_i\,x \;;\; M_d(x) = R_d\,x$$
$$V_i = R_i \text{ [para } 0 < x < u] \;;\; V_d = R_d \text{ [para } u \le x < l]$$

Para el axial distribuido (N) y el rasante (Q = dN/dx) resulta:

$$N_i = \alpha\frac{M_i}{z} - P\frac{\alpha\, l}{z}\frac{senh(\Phi(l-u)/l)}{\Phi\, senh(\Phi)}senh\left(\Phi\frac{x}{l}\right) \;;\; N_d = \alpha\frac{M_d}{z} - P\frac{\alpha\, l}{z}\frac{senh(\Phi u/l)}{\Phi\, senh(\Phi)}senh\left[\Phi\frac{l-x}{l}\right]$$

$$Q_i = \alpha\frac{V_i}{z} - P\frac{\alpha}{z}\frac{senh(\Phi(l-u)/l)}{senh(\Phi)}\cos h\left(\Phi\frac{x}{l}\right) \;;\; Q_d = \alpha\frac{V_d}{z} + P\frac{\alpha}{z}\frac{senh(\Phi u/l)}{senh(\Phi)}\cos h\left[\Phi\frac{l-x}{l}\right]$$

Debe aclararse que aunque haya discontinuidad del cortante no la hay en el rasante ya que éste es proporcional al deslizamiento que como deformación es una función continua.

La elástica si no hubiese deslizamiento (δ) y son él (y) son:

$$\delta_i(x) = \frac{Pl(l-u)x}{6\,EI_{\max}}\left[1-\left[(l-u)/l\right]^2-(x/l)^2\right] \;;\; \delta_d(x) = \frac{Pl\,u(l-x)}{6\,EI_{\max}}\left[1-(u/l)^2-\left[(l-x)/l\right]^2\right]$$

$$y_i(x) = \delta_i(x) + \frac{z\,l^2 N_i(x)}{\Phi^2(1-\alpha)EI_{\max}} \;;\; y_d(x) = \delta_d(x) + \frac{z\,l^2 N_d(x)}{\Phi^2(1-\alpha)EI_{\max}}$$

En todas las expresiones el primer sumando corresponde al estado sin deslizamiento por lo que resulta directo el análisis de la eficiencia conseguida con la conexión flexible. En el caso de carga puntual en el centro del vano es suficientemente aproximado considerar la rigidez eficaz "EI_{ef}".

2.6. Deformaciones longitudinales impuestas, retracción

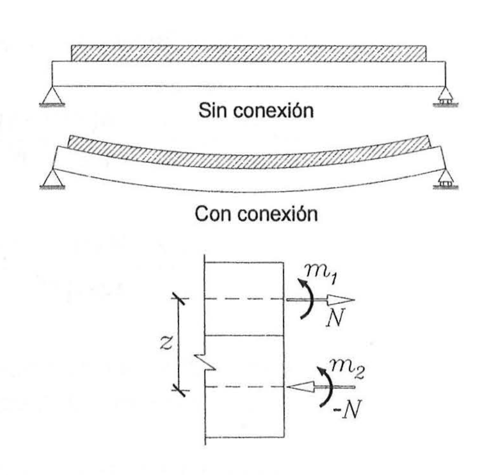
Las diferentes deformaciones entre los materiales pueden ser de origen térmico, higroscópico y, en el caso del hormigón, por la retracción.

El coeficiente de dilatación térmica del hormigón es de 10^{-5} °C^{-1} con árido silíceo y aproximadamente la mitad si es calizo, valor bastante próximo al de gran parte de las maderas utilizadas en el sentido longitudinal de las fibras de 3 a 6 10^{-6} °C^{-1}.

La retracción libre del hormigón y a largo plazo (ε_r) es del orden de 3 a 5 x 10^{-4}. Por otra parte, la madera en el sentido longitudinal de la fibra es bastante estable, la variación dimensional está en el entorno del 0,01 % por cada % de variación de su humedad en equilibrio higroscópico (no del ambiente). Este valor de la madera, de unos 10^{-4} %/%, es del orden de magnitud del de la retracción del hormigón. Así, una madera colocada en obra con una humedad superior a la que adquirirá en su definitivo ambiente reduciría los efectos de la retracción.

En la estructura mixta con el hormigón es costumbre proteger la madera con un plástico o añadir aditivos al hormigón para una dosificación con menor relación agua cemento que también reduce la retracción; además, la fisuración también minora los efectos de la retracción (ref. [15]).

Si no hay conexión entre los materiales (ver figura al margen), la retracción (material superior en la figura) sólo origina un deslizamiento libre entre materiales, sin que se produzcan tensiones internas ni deformaciones por curvatura. Con los materiales conectados, las consecuencias son más notables cuanto mayor sea la rigidez de la conexión.



Continuando bajo un enfoque de rendimientos respecto de la conexión completa, para el caso de viga biapoyada con conexión uniforme, de la ref. [29], el axial distribuido (N) y la flecha (y) en el centro del vano pueden expresarse mediante:

$$N(x=l/2) = -(1-\alpha)\overline{EA}\,\varepsilon_r\left[1-\cosh^{-1}(\Phi/2)\right]$$

$$y(x=l/2) \approx \frac{\alpha\,\varepsilon_r\,L^2}{8z}\mu(s) = \frac{\alpha\,\varepsilon_r\,L^2}{8z}\left(1+\frac{\pi^2}{\Phi^2}\right)^{-1}$$

Siendo "ε_r" la retracción del hormigón como material superior con valor positivo. Expresiones en la que el estado sin deslizamiento resulta corregido por un rendimiento dependiente del parámetro adimensional Φ .

El signo del axial distribuido indica que origina un momento negativo con tracción en el material superior y compresión en el inferior (ver figura). Su par "-N z" es equilibrado por los momentos distribuidos (positivos) "m_1 + m_2" ya que no hay flector global. Los momentos distribuidos, por la compatibilidad de curvaturas, se reparten en cada material en proporción a la suma de las rigideces a flexión ($m_i = E_i I_i / \Sigma EI$) y originan la deformación vertical. La flecha puede aproximarse con suficiente precisión mediante el citado rendimiento μ(s).

De estas expresiones se deduce que para el axial se obtiene un acercamiento al estado sin deslizamiento del 90 % con conexiones que supongan un parámetro $\Phi \approx 6$ mientras que, para la flecha, con $\Phi = 3\pi$.

Por otra parte, para el rasante (Q) en los apoyos:

$$Q(x=0) = -\frac{(1-\alpha)\overline{EA}}{L}\varepsilon_r \, \Phi \tanh(\Phi/2)$$

que muestra que el rasante crece con la rigidez de la conexión (con valores altos prácticamente en la proporción de $\sqrt{K_{unt}}$) si bien, el deslizamiento ($\gamma = Q / K_{unt}$), tiende a anularse. En este caso, se pierde la analogía en la referencia respecto al estado teórico sin deslizamiento (mayor detalle de estos análisis y resultados son la ref. [29]). Adviértase el signo negativo del rasante opuesto al que, en general, producirían las cargas.

Para evaluar la retracción como fenómeno asociado a la fluencia, J. Natterer, J. L. Sandoz y M. Rey (2004, Construction en bois, ref. [44]) proponen utilizar (subíndices h: hormigón, m: madera):

$$E_{c,r} = \frac{E_c}{1+0,5\varphi(t_0,t)} \quad ; \quad E_{m,r} = \frac{E_c}{1+0,5K_{def}(t)}$$

si bien para la madera sólo se recogen en las normativas el coeficiente de fluencia total a largo plazo. Un estudio detallado en este sentido puede consultarse en los clásicos textos de estructura mixta entre hormigón (v.g. ref. [6], [40]).

Un cálculo simplificado cabe plantearlo considerando una retracción reducida ($\varepsilon_{r,\,red}$) por el efecto del armado (subíndice "s" para el acero): $\varepsilon_{r,red} = \varepsilon_r / [1 + (E_s A_s) / (E_c A_c)]$.

2.7. Conclusión

Si puede admitirse que no se produce deslizamiento, la conexión es un aspecto independiente que sólo se plantea a posteriori para resistir el rasante. Por el contrario, si la conexión es flexible, la rigidez de ésta (K_{unt}) es, en desde un principio, una variable decisiva de la respuesta estructural.

Con el aumento de la rigidez de conexión se consigue el acercamiento al estado sin deslizamiento pero con incrementos decrecientes. Con parámetros Φ entre del orden de 5 a 10 (rendimiento $\mu(s)$ del orden del 70 al 90 %) ya resultan relativamente desfavorables las mejoras y son poco significativas con valores superiores. Este hecho es fundamental para decidir si aún merece la pena densificar la conexión o es preferible cambiar su tipología, o incluso reconsiderar la sección.

El diseño de la viga mixta con conexión flexible se esclarece y se racionaliza al orientarlo en base a la eficiencia reduciéndose la necesidad de un proceso iterativo.

El análisis de la eficiencia también nos ha permitido valorar en detalle la ganancia que puede conseguirse al conectar los materiales desde su estado sin conectar. En los casos más habituales de forjados (con los parámetros α que se indicaron), esta ganancia es del orden de 3 a 4 en rigidez (en general el aspecto más determinante) si la conexión fuese completa (sin deslizamiento) y, con conexión flexible mediante clavijas verticales, se reduce al orden de 2 a 3 veces. Con este sistema de conexión los rendimientos respecto del estado sin deslizamiento cabe orientarlos en el entorno del 60 al 80 %.

3.1. Introducción

Se resume en el presente tema el origen del método simplificado propuesto por EC-5 para conexión con deslizamiento y las condiciones para su uso. En el posterior capítulo dedicado al protocolo de análisis se expondrán ejemplos prácticos de cálculo.

3.2. Ecuaciones entre cargas y deformaciones

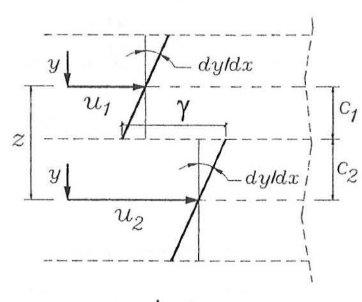
La formulación propuesta por EC-5 tiene su origen en el sistema de ecuaciones diferenciales entre cargas y deformaciones. Se establece éste a partir de consideraciones del equilibrio de cada material en un pequeño tramo de longitud diferencial y de la relación (lineal) entre rasante y deformación de la conexión.

Bajo el supuesto de no actuar axiales exteriores y conexión uniforme, se puede obtener el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales (ref. [34], [44]):

$$E_1 A_1 u_1'' + k_{unt}(u_2 - u_1 + z\,y') = 0 \;;\; E_2 A_2 u_2'' - k_{unt}(u_2 - u_1 + z\,y') = 0$$
$$(E_1 I_1 + E_2 I_2)\,y^{IV} - z\,k_{unt}(u_2' - u_1' + z\,y'') = q$$

La nomenclatura es la utilizada en el anterior capítulo: desplazamientos verticales o elástica: "y"; movimientos horizontales de los centros geométricos de cada material: "u_1, u_2". En total, tres ecuaciones diferenciales para determinar tres funciones que definen los campos de movimientos.

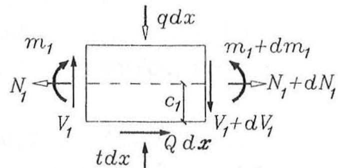
Veamos brevemente la obtención de este sistema. Para ello consideremos la figura del margen derecho y recordemos la relación lineal entre deslizamiento y rasante:



$$\gamma = u_2 - u_1 + z\,y' \;\;;\;\; Q = k_{unt}\,\gamma$$

Del equilibrio de fuerzas horizontales en cada material:

$$Q = -dN_1/dx = dN_2/dx$$



de donde también resulta: $dN_1/dx + dN_2/dx = d(N_1 + dN_2)/dx = 0$, por el hecho de suponer que no aplicados axiales exteriores.

Los alargamientos unitarios de los centros de cada material son: $\varepsilon_i = du_i/dx = N_i / (E_i A_i)$ de donde: $N_i' = E_i\,A_i\,u_i''$.

A partir de estos resultados se obtienen las dos primeras ecuaciones diferenciales mencionadas:

$$N_1' = E_1 A_1 u_1'' = -Q = -k_{unt}\,\gamma \;\rightarrow\; E_1 A_1 u_1'' + k_{unt}(u_2 - u_1 + z\,y') = 0$$
$$N_2' = E_2 A_2 u_2'' = Q = k_{unt}\,\gamma \;\rightarrow\; E_2 A_2 u_2'' - k_{unt}(u_2 - u_1 + z\,y') = 0$$

Establezcamos ahora el equilibrio de momentos en ambos materiales:

$$V_1\,dx + (t-q)\,dx\,dx/2 = Q\,c_1\,dx + dm_1 \;\rightarrow\; V_1 = m_1' + c_1\,Q$$
$$V_2\,dx - t\,dx\,dx/2 = Q\,c_2\,dx + dm_2 \;\rightarrow\; V_2 = m_2' + c_2\,Q$$

en donde no repercuten los infinitésimos de segundo grado (dx^2). La suma de ambas($z = c_1 + c_2$) conduce a:

$$V = V_1 + V_2 = m_1' + m_2' + z\,Q = m_1' + m_2' + z\,k_{unt}\,(u_2 - u_1 + z\,y')$$

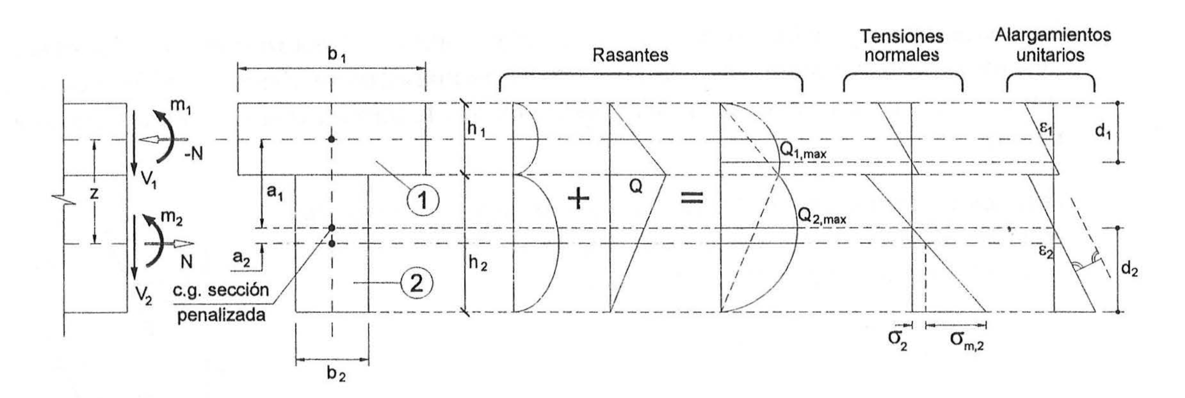
Derivando en un tramo con "z" constante y conexión uniforme(k_{unt} constante) se obtiene:

$$V' = m_1'' + m_2'' + z\,k_{unt}\left(u_2' - u_1' + z\,y''\right)$$

Para el cortante total es $V'=-q$. Por otro lado, a partir de la curvatura: $-y'' = m_i / (E_i\,I_i)$ puede establecerse: $m_i'' = -\,E_i\,I_i\,y^{IV}$. Finalmente, la restante ecuación diferencial es:

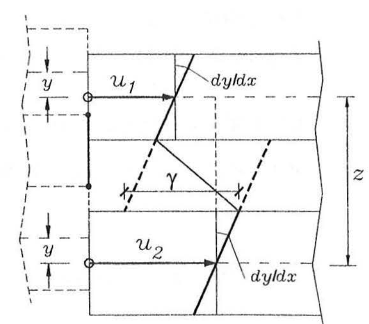
$$(E_1\,I_1 + E_2\,I_2)\,y^{IV} - z\,k_{unt}(u_2' - u_1' + z\,y'') = q$$

En la siguiente figura se muestra un resumen de tensiones en una sección en "T":



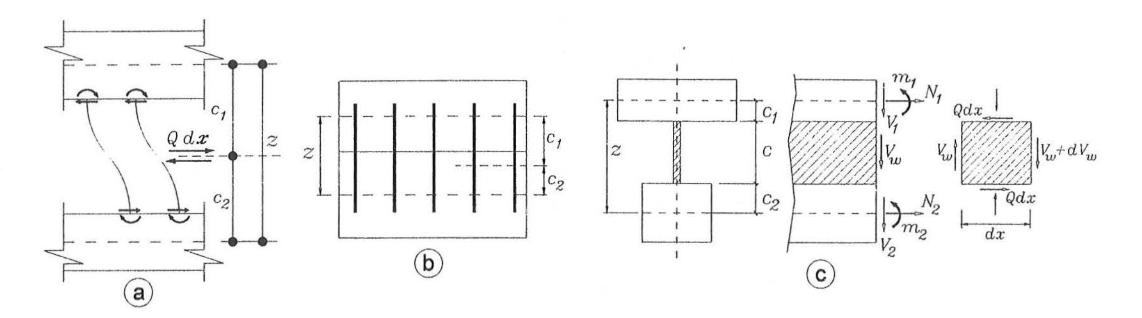
Un hecho de notable importancia práctica para generalizar los resultados, no contemplado en EC-5, es que las ecuaciones diferenciales son igualmente válidas en el caso de separación de materiales. Esto es debido, ver ref. [28], a que el rasante puede mantenerse referido en proporción al balance de movimientos $\gamma = u_2 - u_1 + z\,y'$.

Una manera básica para entenderlo es la que se muestra en la figura indicando a trazos las posiciones de la conexión si no estuviese unida a uno de los materiales y sin entrar, por ello, en carga. Al estar unidos, el rasante origina el movimiento "γ". Un razonamiento más preciso (ver ref. [29]), que obviaremos, debería considerar deslizamientos locales en los anclajes en cada material pudiéndose diferenciar entre las flexibilidades en éstos y en el espacio libre.



Hay que hacer mención en cuanto al reparto de los cortantes distribuidos (ref. [29]). En el planteamiento que se acaba de realizar se ha supuesto la interfase de contacto como una encoladura sin embargo, el tipo de conexión influye decisivamente. En el caso de clavijas verticales, las distancias "c_1, c_2" deben referirse al punto de momento nulo (siguiente figura "a" en caso

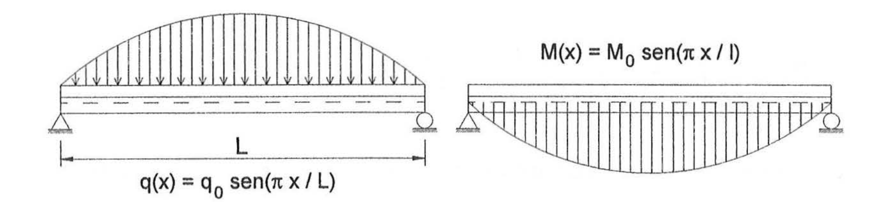
de separación y "b" con contacto). Estas distancias "c_i" dependen de las características de los materiales y las distancias de anclaje.



Cabe también considerar un modelo teórico pero práctico para el análisis (figura "c") de un alma que sólo aportase resistencia al rasante y, consecuentemente, al cortante; sin desarrollar tensiones longitudinales, manteniéndose con ello un modelo de dos materiales frente al axial y flector. En este caso el esfuerzo cortante en los cordones responde a las expresiones citadas con las distancias "c_1, c_2" indicadas en la figura asumiendo a su vez el alma de conexión un cortante $V_w = Q\ c$ (mayor detalle en la ref. [29]).

3.3. Solución para el caso de flector sinusoidal

Una solución simple se puede obtener para el caso de una pieza mixta sometida a un flector y carga de tipo senoidal:



Flector y cargas están relacionados por $d^2M(x)/dx^2 = -\ q(x)$; por ello: $q_0 = M_0\,\pi^2/L^2$.

La solución puede comprobarse a partir de las siguientes expresiones de los campos de desplazamientos:

$$u_1 = u_{10}\cos\left(\frac{\pi x}{L}\right);\ \frac{du_{10}}{dx} = -\frac{\pi u_{10}}{L} sen\left(\frac{\pi x}{L}\right);\ \frac{d^2u_{10}}{dx^2} = -\frac{\pi^2 u_{10}}{L^2}\cos\left(\frac{\pi x}{L}\right)$$

$$u_2 = u_{20}\cos\left(\frac{\pi x}{L}\right);\frac{du_{20}}{dx} = -\frac{\pi u_{20}}{L} sen\left(\frac{\pi x}{L}\right);\ \frac{d^2u_{20}}{dx^2} = -\frac{\pi^2 u_{20}}{L^2}\cos\left(\frac{\pi x}{L}\right)$$

$$y = y_0\, sen\left(\frac{\pi x}{L}\right);\frac{d^2y_0}{dx^2} = -\frac{\pi^2 y_0}{L^2} sen\left(\frac{\pi x}{L}\right);\ \frac{d^4y_0}{dx^4} = \frac{\pi^4 y_0}{L^4} sen\left(\frac{\pi x}{L}\right)$$

Sustituyendo en el sistema de ecuaciones diferenciales, se obtiene para las constantes implicadas (subíndice "0"):

$$y_0 = \frac{q_0\, L^4}{\pi^4} \frac{1}{\sum EI + z^2 \dfrac{\gamma_1 E_1 A_1 E_2 A_2}{\gamma_1 E_1 A_1 + E_2 A_2}} \;;\; y_0 = \frac{q_0\, L^4}{\pi^4} \frac{1}{EI_{ef}}$$

$$u_{10} = \frac{\pi\, y_0}{L} \frac{z \gamma_1 E_2 A_2}{\gamma_1 E_1 A_1 + E_2 A_2} \;;\; u_{20} = -\frac{\pi\, y_0}{L} \frac{z \gamma_1 E_2 A_2}{\gamma_1 E_1 A_1 + E_2 A_2}$$

Siendo "γ_1" un coeficiente adimensional, al que nos referiremos como "penalizador" por el deslizamiento de la conexión, que viene expresado por:

$$\gamma_1 = \frac{1}{1 + \dfrac{\pi^2 E_1 A_1}{L^2 K_{unt}}} = \frac{1}{1 + \dfrac{\pi^2 E_1 A_1\, s}{L^2 K_{ser}}}$$

Las ecuaciones también pueden plantearse, de manera simétrica, utilizando un coeficiente "γ_2" en el que, alternativamente, interviene la rigidez a axial del otro material ($E_2\, A_2$).

Las convergencias a los estados sin deslizamiento y sin conexión quedan reflejadas por los valores extremos del coeficiente penalizador por deslizamiento:

- para $k_{unt} \rightarrow \infty$: $\gamma_1 \rightarrow 1$
- para $k_{unt} \rightarrow 0$: $\gamma_1 \rightarrow 0$

En las anteriores expresiones se denomina rigidez eficaz o equivalente a:

$$EI_{ef} = E_1 I_1 + E_2 I_2 + z^2 \frac{\gamma_1 E_1 A_1 E_2 A_2}{\gamma_1 E_1 A_1 + E_2 A_2} = EI_{min} + z^2 \frac{\gamma_1 E_1 A_1 E_2 A_2}{\gamma_1 E_1 A_1 + E_2 A_2}$$

A partir de las expresiones de las curvaturas "$d^2y(x)/dx^2$" y del momento flector "M(x)" se concluye:

$$\frac{d^2 y(x)}{dx^2} = -\frac{M(x)}{EI_{ef}}$$

que muestra la analogía de comportamiento con la viga sin deslizamiento pero con una menor rigidez a flexión "EI_{ef}". Para el axial y momentos distribuidos y el rasante en el conector se obtiene:

$$N_1 = E_1 A_1 u_1' = -\frac{\gamma_1 E_1 A_1 a_1}{EI_{ef}} M(x) = -N$$

$$N_2 = E_2 A_2 u_2' = \frac{E_2 A_2 a_2}{EI_{ef}} M(x) = N$$

$$m_1 = -E_1 I_1 \frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{E_1 I_1}{EI_{ef}} M(x) \;;\; m_2 = -E_2 I_2 \frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{E_2 I_2}{EI_{ef}} M(x)$$

$$Q = \frac{dN}{dx} \;;\; Q_{conector} = Q s = \frac{E_2 A_2 a_2}{EI_{ef}} s V(x) = \frac{\gamma_1 E_1 A_1 a_1}{EI_{ef}} s V(x)$$

Hay que hacer notar la similitud con las clásicas expresiones del estado sin deslizamiento pero utilizando la rigidez eficaz (EI_{ef}) en lugar de "EI_{max}".

Las cuantías del flector global (M) que asumen el par del axial y el conjunto de momentos distribuidos en cada material son:

$$N\,z = \frac{EI_{ef} - EI_{\min}}{EI_{ef}} M \quad ; \quad m_1 + m_2 = \frac{EI_{\min}}{EI_{ef}} M$$

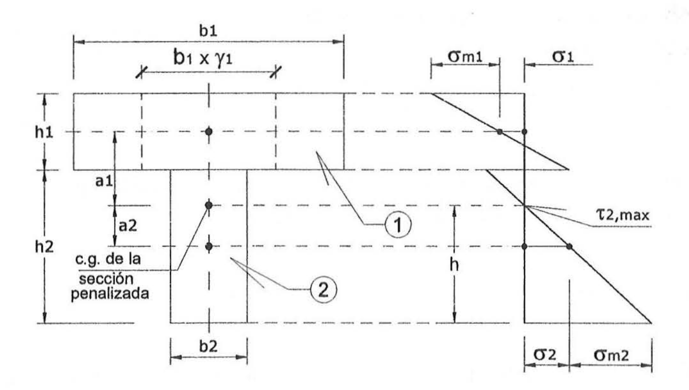
A su vez, la fracción asumida por los momentos distribuidos (M – N z) se reparte en proporción de las rigideces a flexión:

$$m_1 = \frac{E_1 I_1}{\sum EI}\left(M - N\,z\right) \quad ; \quad m_2 = \frac{E_2 I_2}{\sum EI}\left(M - N\,z\right)$$

Estos resultados son extrapolables, con notable aproximación, al caso de la jácena biapoyada con flector parabólico originado por una carga uniforme. Como posteriormente se citará, EC-5 propone otras consideraciones para su uso en vigas continuas y voladizos.

3.4. La sección penalizada por deslizamiento

Una interpretación de estos resultados puede obtenerse a partir de la siguiente sección "penalizada" con el coeficiente "γ_1":



En esta sección se penaliza el material superior "1", por ejemplo en su ancho si se trata de una sección rectangular o, bajo un punto de vista más general, su módulo de elasticidad. La posición del centro geométrico de esta sección penalizada es:

$$a_1 = \frac{E_2\,A_2\,z}{\gamma_1\,E_1\,A_1 + E_2\,A_2} \; ; \; a_2 = \frac{\gamma_1 E_1\,A_1\,z}{\gamma_1\,E_1\,A_1 + E_2\,A_2} \; ; \; a_1 + a_2 = z$$

Pudiéndose mostrar que la rigidez eficaz "EI_{ef}" responde a la siguiente expresión:

$$EI_{ef} = EI_{\min} + \gamma_1\,E_1\,A_1\,a_1^2 + E_2\,A_2\,a_2^2 \quad ; \quad EI_{\min} = E_1\,I_1 + E_2\,I_2$$

Es preciso destacar que esta expresión no es el resultado de aplicar el "Teorema de Steiner" a la sección penalizada pues, en este supuesto, el sumando "E_1I_1" debería de estar multiplicado por el factor de penalización "γ_1".

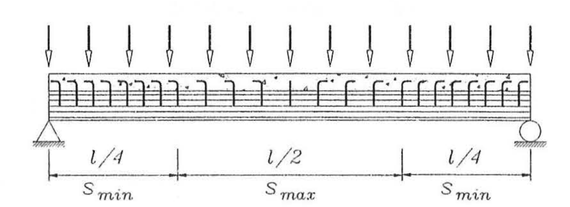
El término "$EI_{min} = E_1\, I_1 + E_2\, I_2$" es la rigidez a flexión de la viga mixta si no hubiese conexión; en este caso son nulos "k_{unt}" y "γ_1". Por otra parte: "$\gamma_1\, E_1\, A_1\, a_1^2 + E_2\, A_2\, a_2^2$" es el aumento de rigidez que se logra con la conexión deslizante entre ambos materiales.
Para "$\gamma_1 = 1$", que supone "$K_{unt} = K_{ser} / s \rightarrow \infty$", resulta la rigidez a flexión máxima "EI_{max}" del estado sin deslizamiento. Apréciese que las distancias "a_1, a_2" que localizan el centro geométrico de la sección penalizada están en función de la rigidez de la conexión.

3.5. Condiciones para la utilización del método

Para la aplicación de este práctico procedimiento, EC-5 establece los siguientes requisitos:

- La viga se encuentra simplemente apoyada. En vigas continuas debe tomarse el 80 % de la luz. En voladizos debe tomarse el doble de la luz.
- La separación entre los conectores es constante o varía uniformemente en acuerdo a los esfuerzos cortantes entre "s_{max}" y "s_{min}" con: $s_{max} \leq 4\, s_{min}$. Con separación variable se obtiene una pieza de rigidez eficaz variable.
- La ley de flectores es de tipo sinusoidal o parabólica.

Puede optarse por una distancia menor de los conectores (s_{min}) en los cuartos extremos de la viga y una distancia mayor (s_{max}) en la mitad central del vano



Siempre que: $s_{max} < 4\, s_{min}$, EC-5 permite el cálculo como si se tratase de una conexión a distancias uniformes con valor equivalente o eficaz:

$$s_{ef} = 0,75\, s_{min} + 0,25\, s_{max}$$

Ahora bien, la comprobación del conector debe realizarse con su correspondiente rasante y separación. Fíjese el lector en la figura como se colocan las barras provistas de patilla en acuerdo al sentido del rasante.

En los anexos de EC-5 se incluyen formulaciones para casos con más materiales conformando secciones en "I" y en cajón. Con más dos de materiales, por cada unión con deslizamiento, se penaliza uno de ellos.

La formulación directamente en tensiones y para materiales en contacto con secciones rectangulares. Para sección en "T" (ver figura del anterior epígrafe 3.4):

$$\sigma_1 = \frac{\gamma_1\, E_1\, a_1}{EI_{ef}} M \;\; ; \;\; \sigma_2 = \frac{E_2\, a_2}{EI_{ef}} M$$

$$\sigma_{m,1} = \frac{E_1\, h_1}{2\, EI_{ef}} M \;\; ; \;\; \sigma_{m,2} = \frac{E_2\, h_2}{2\, EI_{ef}} M$$

$$Q_{conector} \frac{E_2\, A_2\, a_2}{EI_{ef}} s\, V = \frac{\gamma_1\, E_1\, A_1\, a_1}{EI_{ef}} s\, V \;\; ; \;\; \tau_{2,max} = \frac{E_2\, h^2}{2\left(EI\right)_{ef}} V$$

Un análisis más general, con secciones no rectangulares y separación entre materiales puede llevarse a cabo utilizando los esfuerzos distribuidos como se ha mostrado anteriormente. Téngase precaución a la hora de interpretar el carácter de tracción o compresión de las tensiones debidas al axial distribuido.

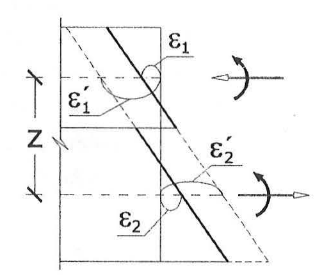
3.6. Los coeficientes "γ" y la eficiencia

Hemos visto como "γ_1" está acotado entre cero y la unidad y que valores más altos indican mayor proximidad al estado sin deslizamiento. No obstante, es preciso añadir variables para analizar eficiencias más directas y prácticas para el diseño y el estudio conceptual. Entre otras mostraremos una posibilidad mediante el coeficiente "γ_0" y utilizando simultáneamente:

$$\gamma_1 = \left(1 + \frac{\pi^2 E_1 A_1}{L^2 K_{unt}}\right)^{-1} \quad ; \quad \gamma_2 = \left(1 + \frac{\pi^2 E_2 A_2}{L^2 K_{unt}}\right)^{-1}$$

Una interpretación geométrica a partir de estos coeficientes adimensionales es la que se indica seguidamente (ver siguiente figura).

Prolongando las rectas de los alargamientos unitarios de cada material (que son paralelas por causa de la igualdad de curvaturas), como si se tratase de estados sin deslizamiento referidos a uno de ellos, puede demostrarse, para los alargamientos unitarios de los centros geométricos:



$$\varepsilon_1 = \gamma_1 \varepsilon_1' \quad ; \quad \varepsilon_2 = \gamma_2 \varepsilon_2'$$

Por otra parte (ver anterior tema):

$$d\gamma / dx = \varepsilon_2 - \varepsilon_1 + z\, d^2y/dx^2 = \varepsilon_1' - \varepsilon_1 = \varepsilon_2' - \varepsilon_2 = \varepsilon_{slip} \rightarrow \varepsilon_{slip} = \varepsilon_i \frac{1-\gamma_i}{\gamma_i}$$

Dado el comportamiento intermedio entre los estados de conexión nula y completa, podemos introducir un coeficiente "γ_0" y escribir:

$$EI_{ef} = \sum EI + \gamma_0 z^2 \overline{EA} = EI_{\min} + \gamma_0 \left(EI_{\max} - EI_{\min}\right)$$

En definitiva, "γ_0" es un rendimiento entre rigideces a flexión:

$$\gamma_0 = \frac{EI_{ef} - EI_{\min}}{EI_{\max} - EI_{\min}}$$

que expresa la ganancia de rigidez conseguida respecto de la máxima posible. Este parámetro de rendimiento es también útil pero no coincide con el que es más directo entre flechas como se expuso en el anterior tema para "μ(s)". Ello es debido a que flechas y rigideces son inversamente proporcionales.

Con el parámetro "γ_0" y los alargamientos unitarios se obtiene una propiedad similar a la anteriormente mostrada ($\Sigma\varepsilon = \varepsilon_1 + \varepsilon_2$): "$\sum \varepsilon = \gamma_0 \left(\sum \varepsilon + \varepsilon_{slip}\right)$".

Utilizando los parámetros del anterior tema, pueden demostrarse para "γ_0" las expresiones (ref . [29]):

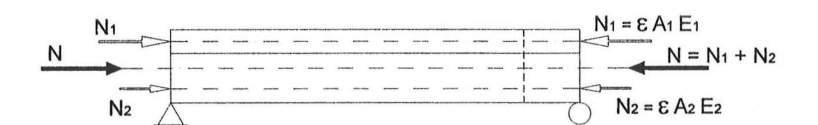
$$\gamma_0 = \frac{1}{1+\dfrac{\pi^2}{(1-\alpha)\Phi^2}} = \frac{1}{1+\dfrac{\pi^2 \overline{EA}}{K_{unt}\,L^2}} \quad ; \quad \gamma_0 = \frac{\mu(s)(1-\alpha)}{1-\alpha\,\mu(s)} \;\rightarrow\; \mu(s) = \frac{\gamma_0}{1-\alpha(1-\gamma_0)}$$

Finalmente, en función de "γ_1" y de "γ_2" pueden obtenerse (ref . [29]) las expresiones:

$$\gamma_0 = \left(1+\frac{1}{\dfrac{\gamma_1}{1-\gamma_1}+\dfrac{\gamma_2}{1-\gamma_2}}\right)^{-1} \quad ; \quad \mu(s) = \left(1+\frac{1-\alpha}{\dfrac{\gamma_1}{1-\gamma_1}+\dfrac{\gamma_2}{1-\gamma_2}}\right)^{-1}$$

3.7. Introducción al efecto del axial y al análisis del pandeo

Si el axial total "N" se reparte en cada material en axiales distribuidos "N_i" (ver la siguiente figura) en proporción a la suma de rigideces ($\sum E_i A_i$), todos ellos sufren un mismo acortamiento frente al cual la rigidez a axial efectiva del conjunto de rigideces: $EA_{ef} = \sum E_i A_i$. No se ha producido rasante y la conexión no ha entrado en carga, la respuesta es igual con conexión flexible, completa o sin ella. Si los axiales introducidos no cumplen esta proporción de reparto se producirá una flexión adicional.



El sistema de fuerzas "N_1 y N_2" equivale, a efectos mecánicos, a la resultante "$N = \sum N_i$" localizada a nivel del centro geométrico de la sección completa (ponderando cada material por su respectivo módulo de elasticidad). Cualquier otra combinación de axiales "N_1 y N_2" que no cumpla este reparto produciría adicionalmente flexión excepto el en caso de no haber conexión.

En esta situación, las tensiones normales (σ) de cálculo (d) en cada material (i) son:

$$N_{d,i} = \frac{E_i A_i}{\sum EA} N_d \;\rightarrow\; \sigma_{c,0,d,i} = \frac{E_i A_i}{EA_{ef}} N_d \quad ; \quad N_d = \sum_i N_{d,i}$$

Puede mostrarse que la carga crítica (N_{cr}) de un pilar compuesto con conexión flexible es (L longitud de pandeo, véase por ejemplo las ref. [34] y [44]):

$$N_{cr} = \frac{\pi^2 EI_{ef}}{L^2}$$

análoga a la clásica pero utilizando la rigidez eficaz (resultado que es exacto). El radio de giro efectivo y la esbeltez del conjunto mixto son:

$$i_{ef} = \sqrt{\frac{EI_{ef}}{EA_{ef}}} \quad ; \quad \lambda_{ef} = \frac{L}{i_{ef}}$$

Para cada material, la esbeltez relativa es:

$$\lambda_{rel,i} = \lambda_{ef} \sqrt{\frac{f_{c,0,k,i}}{\pi^2 E_{0,05;i}}}$$

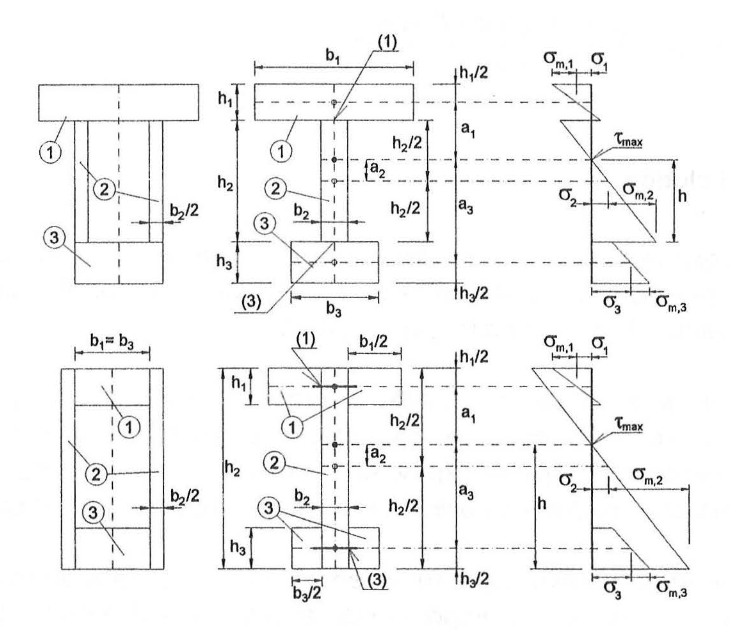
A partir de ésta, se obtiene el correspondiente coeficiente "$\chi_{c,i}$" para establecer la comprobación considerando el pandeo.

Para el análisis del pandeo puede también consultarse la referida lectura de H. Kreuzinger (1995) incluida en Timber Engineering (STEP 1).

EC-5 también ofrece un anexo para diferentes casos de pilares compuestos con conexión flexible.

3.8. Otras secciones en flexión, el anexo "B" de EC-5

Analizado el caso de dos materiales exponemos seguidamente los de tres materiales conformando vigas en "I" y en cajón en base a la formulación en tensiones expuesta en los anexos de EC-5.



La áreas de cada material son $A_i = b_i\, h_i$ y los momentos de inercia respecto de su respectivo centro $I_i = b_i\, h_i^3 / 12$. Es usual el tomar como referencia el alma (material 2) utilizándose los coeficientes penalizadores:

$$\gamma_2 = 1 \quad ; \quad \gamma_i = \frac{1}{1 + \dfrac{\pi^2 E_i A_i}{l^2 K_i}} \quad \text{para } i = 1;\, i = 3$$

En donde las rigideces de conexión son "$K_1 = K_{ser,1} / s_1$" para la indicada como (1) en la figura y "$K_2 = K_{ser,2} / s_2$" para la (2). Recordamos que en estado límite último se utiliza "$2\,K_{ser} / 3$".

El centro geométrico de la sección penalizada se determina mediante:

$$a_2 = \frac{\gamma_1 E_1 A_1 (h_1 + h_2) - \gamma_3 E_3 A_3 (h_2 + h_3)}{2 \sum_{i=1}^{3} \gamma_i E_i A_i}$$

Obteniéndose directamente los restantes "a_1, a_3" en la figura . La rigidez eficaz es:

$$EI_{ef} = \sum_{i=1}^{3} \left(E_i I_i + \gamma_i E_i A_i a_i^2 \right)$$

Las tensiones normales (en flexión simple) originadas en cada material por el axial distribuido (σ_i) y el momento distribuido ($\sigma_{m,i}$) se obtienen mediante:

$$\sigma_i = \frac{\gamma_i E_i a_i}{EI_{ef}} M \quad ; \quad \sigma_{m,i} = \frac{E_i h_i}{2\,EI_{ef}} M$$

La máxima tensión cortante en el alma (donde las tensiones normales se anulan ocurriendo en el c.g. de la sección penalizada) puede evaluarse mediante:

$$\tau_{2,\max} = \frac{\gamma_3 E_3 A_3 a_3 + 0{,}5 E_2 b_2 h^2}{b_2\, EI_{ef}} V$$

3.9. Conclusión

Se han expuesto en este tema las bases para comprender y utilizar el método simplificado, propuesto por EC-5, para el análisis de piezas con conexión flexible. Este procedimiento es una herramienta útil que no ha recogido CTE: SE-M.

Este método resuelve con sencillez bastantes casos prácticos y su carácter analítico permite visualizar la repercusión de los diferentes en el diseño aunque no de la manera tan directa como la metodología que se expuso en el anterior tema. Si el problema queda fuera de los límites de su aplicación, debe recurrirse a modelos más complejos o a procedimientos numéricos.

Se ha mostrado brevemente su origen para la pieza compuesta por dos materiales y como resulta una formulación análoga a la del estado sin deslizamiento pero utilizando la rigidez eficaz (EI_{ef}), cuyo valor es intermedio entre éste y el estado sin conexión.

Para una mayor generalidad en la aplicabilidad del método, en secciones no rectangulares y con separación de materiales, se ha propuesto su utilización en base a los esfuerzos distribuidos. El modelo con separación de materiales es sobre todo importante en la estructura mixta madera-hormigón por la posibilidad de interponer un tablero por razones constructivas o estéticas y para el análisis en fisuración.

CUADERNO

261.01

CATÁLOGO Y PEDIDOS EN

cuadernos.ijh@gmail.com
info@mairea-libros.com

ISBN 978-84-9728-274-1

